UNITÀ 9
LE GRANDEZZE E LA PROPORZIONALITÀ

9.1 Generalità

Nelle unità precedenti abbiamo considerato insiemi di elementi (segmenti, angoli, superfici piane) con i quali abbiamo operato il *confronto* e la *somma*: si dice che tali elementi sono **grandezze geometriche** o semplicemente **grandezze** e si parla di **insiemi di grandezze** o di **classi di grandezze**.

Le grandezze di una stessa classe si dicono **omogenee** fra loro e si possono confrontare e sommare.

Non ha senso, invece, confrontare e/o sommare un segmento con un angolo oppure un angolo e una superficie: le operazioni di confronto e somma possono essere eseguite **solo** tra elementi di una stessa classe.

Data una classe di grandezze X, valgono le seguenti proprietà:

1. $\forall A, B \in X$ è vera una sola delle relazioni
$$A < B \quad , \quad A = B \quad , \quad A > B$$
cioè due qualsiasi elementi di X sono sempre confrontabili;

2. $\forall A, B \in X: \; A + B = B + A$ (proprietà commutativa dell'addizione);

3. $\forall A, B, C \in X: (A + B) + C = A + (B + C)$ (proprietà associativa dell'addizione).

Si estendono alle grandezze le proprietà delle relazioni $<$ (minore), $\leq$ (minore o uguale), $>$ (maggiore) e $\geq$ (maggiore o uguale) che valgono negli insiemi numerici, nonché le definizioni di **multiplo** e di **sottomultiplo** date per i segmenti e per gli angoli.

Si ha, infatti, la seguente definizione:

- Si dice **multiplo** di una grandezza A, secondo il numero naturale $n \neq 0$, la grandezza B, ad essa omogenea, somma di n grandezze uguali ad A; cioè:
$$B = \underbrace{A + A + A + \ldots + A}_{n \text{ volte}}$$
o, meglio:
$$B = n\,A\,.$$
La grandezza A si dice **sottomultipla** di B secondo il numero n e si scrive:
$$A = \frac{1}{n} B\,.$$

Per le classi di grandezze valgono i due postulati seguenti:

POSTULATO DI EUDOSSO-ARCHIMEDE:

Date due grandezze omogenee, di cui una non nulla, esiste sempre una grandezza multipla della minore che supera la maggiore.

POSTULATO DELLA DIVISIBILITÀ ALL'INFINITO (o POSTULATO DELLA DIVISIBILITÀ DELLE GRANDEZZE):

Per ogni grandezza A e per ogni numero naturale n non nullo, esiste sempre, ed è unica, la grandezza B, omogenea ad A, sottomultipla di A secondo il numero n (cioè $B = \frac{1}{n}A$).

OSSERVAZIONE

Il secondo postulato permette di dividere una grandezza in un numero qualsiasi di parti congruenti.

9.2 Grandezze commensurabili e incommensurabili

Due grandezze omogenee A e B si dicono **commensurabili** quando ammettono una grandezza C, ad esse omogenea, come sottomultipla comune; in altre parole quando **esiste** una terza grandezza, omogenea alle prime due, che è contenuta un numero intero di volte in entrambe le grandezze.

Se:

$$A = m\,C \quad \text{e} \quad B = n\,C, \quad \text{con } m \text{ ed } n \text{ interi positivi,}$$

si ha:

$$C = \frac{1}{n}B$$

e quindi:

$A = m(\frac{1}{n}B) = \frac{m}{n}B$ (la grandezza A è multipla, secondo m, dell'n-esima parte della grandezza B)

o, anche:

$$\frac{A}{B} = \frac{m}{n}$$

e si dice che il **rapporto** delle grandezze A e B è $\frac{m}{n}$, cioè un **numero razionale**.

Si dice anche che il numero razionale $\frac{m}{n}$ è la **misura** della grandezza A rispetto alla grandezza B, scelta come unità di misura.

Esempio:

Fissato un segmento AB, consideriamo due segmenti $CD = 3AB$ e $EF = 2AB$ (fig. 1):

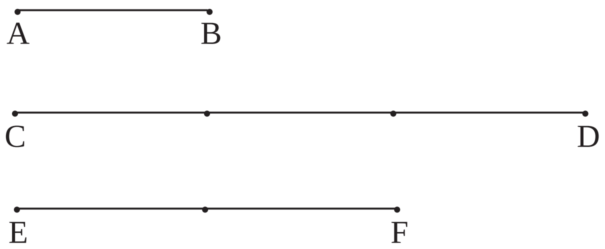


fig. 1

Osserviamo che i segmenti CD ed EF ammettono come sottomultiplo comune il segmento AB; infatti:

$$CD = 3AB \quad \Longrightarrow \quad AB = \frac{1}{3}CD$$

$$EF = 2AB \quad \Longrightarrow \quad AB = \frac{1}{2}EF$$

e quindi:

$$\frac{1}{3}CD = \frac{1}{2}EF = AB$$ **(cosa sta a significare questa scrittura?)**

Inoltre:

$$CD = 3\left(\frac{1}{2}EF\right) \quad \text{cioè} \quad CD = \frac{3}{2}EF$$

e

$$EF = 2\left(\frac{1}{3}CD\right) \quad \text{cioè} \quad EF = \frac{2}{3}CD.$$

I due segmenti CD ed EF sono commensurabili e scriviamo:

$$\frac{CD}{EF} = \frac{3}{2} \quad \text{oppure} \quad \frac{EF}{CD} = \frac{2}{3}.$$

Pertanto:

- il numero razionale $\frac{3}{2}$ è la misura del segmento CD rispetto al segmento EF;
- il numero razionale $\frac{2}{3}$ è la misura del segmento EF rispetto al segmento CD.

In generale, il rapporto di due grandezze commensurabili è un numero razionale, cioè un numero intero o un numero decimale limitato o, ancora, un numero decimale illimitato periodico.

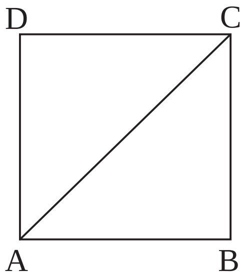
Due grandezze omogenee *A* e *B* si dicono **incommensurabili** quando non ammettono una grandezza *C*, ad esse omogenea, come sottomultipla comune; in altre parole quando **non esiste** una terza grandezza, omogenea alle prime due, che è contenuta un numero intero di volte in entrambe le grandezze.

Un esempio di grandezze incommensurabili è dato dal lato di un quadrato e dalla sua diagonale.

Si ha, infatti, il seguente:

TEOREMA

Il lato e la diagonale di un quadrato sono segmenti incommensurabili.



Hp.: *ABCD* quadrato

Th.: *AB* e *AC* incommensurabili

Dimostrazione

Supponiamo per assurdo che il lato *AB* e la diagonale *AC* siano segmenti commensurabili e che, quindi, ammettano come sottomultiplo comune un segmento, che indichiamo con *U*, contenuto *m* volte in *AB* ed *n* volte in *AC*, con *m* ed *n* interi positivi; cioè:

$$AB = m\,U \qquad \text{e} \qquad AC = n\,U\ ,$$

per cui i segmenti *AB* e *AC* possono essere divisi rispettivamente in *m* ed *n* segmenti, tutti di lunghezza *U*.

Di conseguenza i quadrati costruiti su *AB* e *AC* sono costituiti rispettivamente da m^2 e da n^2 quadratini di lato *U* (fig. 2)

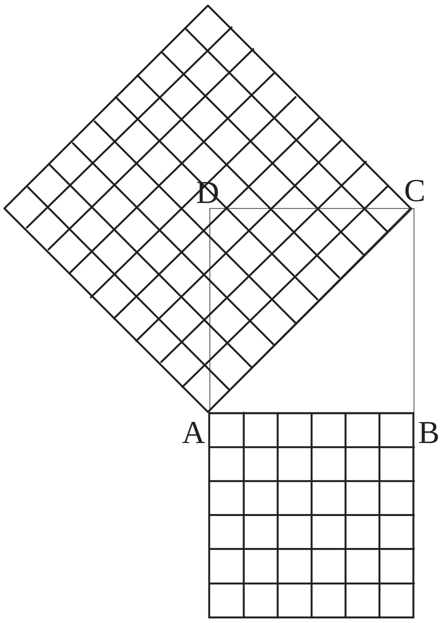


fig. 2

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo isoscele *ABC* si ha:

$$q(AC) \doteq q(AB) + q(BC)$$

[fig. 3]:

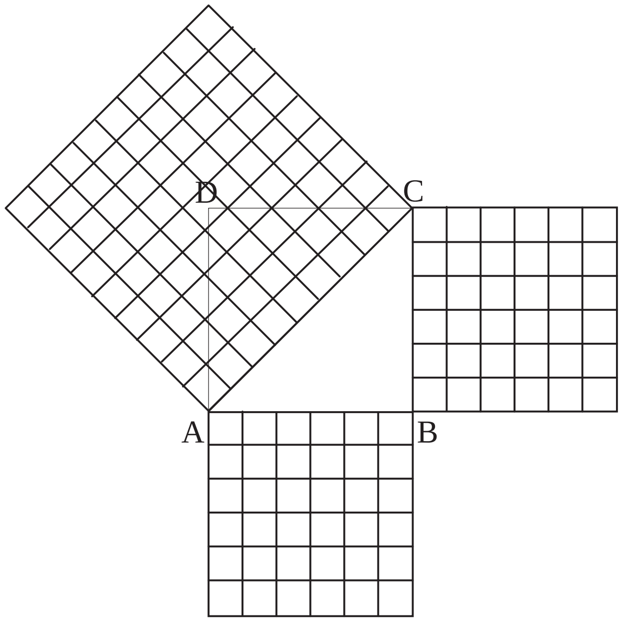


fig. 3

Poiché:

- q(*AC*) è costituito da n^2 quadratini di lato *U*;
- q(*AB*) è costituito da m^2 quadratini di lato *U*;
- q(*BC*) è costituito da m^2 quadratini di lato *U* **(PERCHÉ?)**,

si ha:

$$n^2 = m^2 + m^2$$

cioè:

$$n^2 = 2\,m^2. \quad (*)$$

Osserviamo che:

- se due numeri sono uguali, devono avere la stessa scomposizione in fattori primi;
- se un numero è elevato al quadrato, tutti i suoi fattori primi devono comparire un numero pari di volte.

Pertanto l'uguaglianza precedente implica che i numeri n^2 e 2 m^2, scomposti in fattori primi, devono avere gli stessi fattori ed elevati agli stessi esponenti.

Ma:

- il numero intero n^2, scomposto in fattori primi, o non contiene il fattore 2 o lo contiene un numero pari di volte;
- il numero intero $2m^2$, scomposto in fattori primi, conterrà il fattore 2 necessariamente un numero dispari di volte **(PERCHÉ?)**,

e quindi i numeri n^2 e $2m^2$ non contengono gli stessi fattori, elevati agli stessi esponenti.

Pertanto l'uguaglianza (*) non è vera; si è così giunti ad un assurdo e questo deriva dall'aver supposto che il lato *AB* e la diagonale *AC* siano segmenti commensurabili.
Si conclude, quindi, che il lato e la diagonale di un quadrato sono segmenti incommensurabili.

C.V.D.

9.3 Rapporto di due grandezze

Come conseguenza dell'ultimo teorema si ha che la misura di una grandezza rispetto ad un'altra non si può esprimere sempre mediante un numero razionale.
Più precisamente, date due grandezze omogenee *A* e *B*, si hanno i seguenti due casi:

1. le grandezze *A* e *B* sono commensurabili: il loro rapporto **è** un **numero razionale** $\frac{m}{n}$;
2. le grandezze *A* e *B* sono incommensurabili: il loro rapporto **non è** un **numero razionale**.

Vogliamo vedere se è possibile dare una "nuova" definizione di rapporto di due grandezze omogenee che possa valere sia per le grandezze commensurabili che per quelle incommensurabili.
Il procedimento che seguiremo vale per due qualunque grandezze omogenee; qui ci riferiamo, in particolare, a due segmenti *AB* e *CD* (fig. 4):

fig. 4

Per determinare il rapporto $\frac{AB}{CD}$ riportiamo consecutivamente il segmento *CD* sul segmento *AB*, a partire dall'estremo *A* (fig. 5):

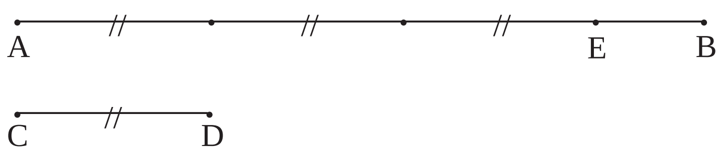


fig. 5

Nel caso in figura, CD è contenuto 3 volte in AB con resto $EB < CD$ (**cosa succede se $AB < CD$?**).
Dividiamo ora CD in 10 parti congruenti e riportiamo su EB la decima parte di CD (fig. 6):

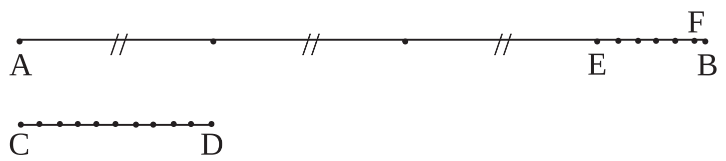


fig. 6

Osserviamo che $\frac{CD}{10}$ è contenuto 5 volte in EB, con resto $FB < \frac{CD}{10}$. Ripetiamo lo stesso procedimento riportando, di volta in volta, sui vari resti ottenuti, i sottomultipli decimali di CD, cioè $\frac{CD}{100}, \frac{CD}{1000}, \dots$.

Se si perviene ad un resto *nullo*, vuol dire che il *rapporto* dei due segmenti è un numero *decimale limitato*, costituito dalla successione delle varie cifre trovate; altrimenti tale successione dà luogo ad un *numero decimale illimitato*, *periodico* o *aperiodico*, che rappresenta, in ogni caso, il **rapporto** *dei due segmenti*.

In definitiva, date due grandezze omogenee A e B, si ha che:

- se A e B sono *commensurabili*, il rapporto A/B è un *numero razionale* (intero, o decimale limitato, o decimale illimitato periodico) rappresentato dal quoziente m/n di due numeri interi positivi.

- se A e B sono *incommensurabili*, il rapporto A/B è un *numero irrazionale* (cioè un numero decimale illimitato aperiodico).

Possiamo, quindi, affermare che il nostro tentativo ha avuto successo.
Si può, quindi, dare una "nuova" definizione di rapporto di due grandezze omogenee; precisamente:
Il **rapporto** di due **grandezze omogenee** è un **numero reale positivo** dato dal quoziente delle loro misure, relativamente ad una grandezza scelta come unità di misura: questo numero reale è razionale o irrazionale a seconda che le due grandezze siano rispettivamente commensurabili o incommensurabili.

Dal momento che la terminologia qui usata per i rapporti tra grandezze, e quella che verrà utilizzata in seguito per le grandezze proporzionali, è la stessa di quella già usata per i rapporti e per le proporzioni tra numeri razionali assoluti, riteniamo opportuno richiamare alcune definizioni e proprietà.

9.4 Rapporto tra due numeri. Proporzioni

Iniziamo col dare la seguente definizione:

Si dice **rapporto** tra due numeri a e b, nell'ordine dato e con $b \neq 0$, il quoziente della divisione di a e b. Il rapporto tra i numeri a e b si indica con il simbolo $a : b$ oppure $\frac{a}{b}$.

I due numeri a e b si dicono **termini** del rapporto e precisamente:

a è il **primo termine** del rapporto e si chiama **antecedente**;

b è il **secondo termine** del rapporto e si chiama **conseguente**.

Se si scambiano i termini del rapporto $\frac{a}{b}$, purché diverso da zero (**PERCHÉ?**), si ottiene il nuovo rapporto $b : a = \frac{b}{a}$.

Il rapporto $\frac{b}{a}$ viene detto **rapporto inverso** o **reciproco** di $\frac{a}{b}$.

Esempi:

il rapporto tra 6 e 3 è $6 : 3 = 2$; il suo inverso è $3 : 6 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$;

il rapporto tra 3 e 5 è $3 : 5 = \frac{3}{5}$; il suo inverso è $5 : 3 = \frac{5}{3}$;

il rapporto tra $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{5}$ è $\frac{2}{3} : \frac{3}{5} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{5}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3} = \frac{10}{9}$; il suo inverso è $\frac{3}{5} : \frac{2}{3} = \frac{9}{10}$.

Consideriamo ora i seguenti due rapporti numerici: $\frac{12}{3}$ e $\frac{24}{6}$.

I rapporti $\frac{12}{3}$ e $\frac{24}{6}$ sono uguali, infatti il quoziente di $12 : 3$ (= 4) è uguale al quoziente di $24 : 6$ (= 4), per cui possiamo scrivere:

$$12 : 3 = 24 : 6$$

Questa uguaglianza si chiama *proporzione* e si legge "12 *sta a* 3 *come* 24 *sta a* 6".

In generale, si dà la seguente definizione:

Dati quattro numeri a, b, c, d, nell'ordine in cui sono scritti, con b e d diversi da zero, si dice che essi sono in **proporzione** se il rapporto tra il primo e il secondo è uguale al rapporto tra il terzo e il quarto, e si scrive:

$a : b = c : d$ (si legge: "a sta a b come c sta a d").

[Una proporzione è, quindi, l'uguaglianza fra due rapporti].

I numeri a, b, c, d si chiamano **termini della proporzione;** in particolare:

- ❖ b, c si chiamano **medi**;
- ❖ a, d si chiamano **estremi**.

Il numero d si dice **quarto proporzionale** dopo a, b, c.

Inoltre:

- ❖ a e c, primo e terzo termine della proporzione, si chiamano **antecedenti**;
- ❖ b *e* d, secondo e quarto termine della proporzione, si chiamano **conseguenti**.

Una proporzione si dice **continua** se i medi sono uguali cioè se:

$$a : b = b : c$$

In questo caso, b si dice **medio proporzionale** tra a e c mentre c si dice **terzo proporzionale** dopo a e b.

Nella proporzione continua:

$$8 : 4 = 4 : 2$$

4 è il medio proporzionale tra 8 e 2 mentre 2 è il terzo proporzionale dopo 8 e 4.

Proprietà delle proporzioni

Dalla definizione di frazioni equivalenti, si deduce la seguente proprietà:

PROPRIETÀ FONDAMENTALE DELLE PROPORZIONI

In ogni proporzione il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi.

Dalla proporzione:

$$a : b = c : d$$

si ricava infatti che:

$$b\,c = a\,d\ .$$

Esempio:

La proporzione

$5 : 4 = 20 : 16$,

scritta come uguaglianza tra frazioni, diventa:

$$\frac{5}{4} = \frac{20}{16}\,.$$

Dalla definizione di frazioni equivalenti si ha (*prodotti in croce*):

$4 \cdot 20 = 5 \cdot 16$ (= 80)

(e, ovviamente, $5 \cdot 16 = 4 \cdot 20$).

Viceversa:

Siano dati i numeri 5, 2, 20, 8 ; poiché:

$2 \cdot 20 = 5 \cdot 8 \;\; (= 40)$,

possiamo dire che i numeri 5, 2, 20, 8 , nell’ordine dato, formano una proporzione; precisamente:

$5 : 2 = 20 : 8$.

PROVA TU

Scrivi quattro numeri che, nell’ordine dato, formino una proporzione.

Dalla proprietà fondamentale, discendono le seguenti proprietà:

PROPRIETÀ DELL’INVERTIRE.

Se in una proporzione si scambia ogni antecedente con il proprio conseguente, si ha ancora una proporzione.

Dalla proporzione

$$a : b = c : d\,,$$

scambiando ogni antecedente con il proprio conseguente, si ottiene:

$$b : a = d : c$$

che è ancora una proporzione (**PERCHÉ?**).

Esempio:

Dalla proporzione

$4 : 12 = 3 : 9$,

scambiando ogni antecedente con il proprio conseguente, si ottiene:

$12 : 4 = 9 : 3$

che è ancora una proporzione (**PERCHÉ?**).

PROPRIETÀ DEL PERMUTARE.

Se in una proporzione si scambiano fra loro i medi o gli estremi, si ottiene ancora una proporzione.

Dalla proporzione

$$a : b = c : d\,,$$

si ottengono le seguenti proporzioni:

$a : c = b : d$ (*scambiando fra loro i medi*);

$d : b = c : a$ (*scambiando fra loro gli estremi*).

Esempio:

Dalla proporzione

$15 : 5 = 6 : 2$,

- scambiando fra loro i medi si ottiene:

  $15 : 6 = 5 : 2$ che è ancora una proporzione (**PERCHÉ?**);

- scambiando fra loro gli estremi si ottiene:

  $2 : 5 = 6 : 15$ che è ancora una proporzione (**PERCHÉ?**).

PROPRIETÀ DEL COMPORRE

In ogni proporzione, la somma dei primi due termini sta al primo (al secondo) come la somma degli altri due termini sta al terzo (al quarto).

Dalla proporzione

$$a : b = c : d \ ,$$

si ottengono le proporzioni seguenti:

- $(a+b) : a = (c+d) : c$
- $(a+b) : b = (c+d) : d$

[*ovviamente devono essere definite le varie operazioni***]**

Esempio:

Dalla proporzione

$5 : 2 = 10 : 4$,

si ottengono le seguenti:

- $(5 + 2) : 5 = (10 + 4) : 10$ cioè $7 : 5 = 14 : 10$;
- $(5 + 2) : 2 = (10 + 4) : 4$ cioè $7 : 2 = 14 : 4$,

che sono ancora proporzioni (**PERCHÉ?**).

PROPRIETÀ DELLO SCOMPORRE

In ogni proporzione, in cui gli antecedenti sono maggiori dei conseguenti, la differenza fra i primi due termini sta al primo (al secondo) come la differenza degli altri due termini sta al terzo (al quarto).

Dalla proporzione

$$a : b = c : d \quad (\text{con } a > b \text{ e } c > d) \ ,$$

si ottengono le proporzioni seguenti:

- $(a - b) : a = (c - d) : c$
- $(a - b) : b = (c - d) : d$

E se $a < b$ e $c < d$?

Esempio:

Dalla proporzione

$5 : 2 = 10 : 4$,

si ottengono le seguenti:

- $(5 - 2) : 5 = (10 - 4) : 10$ cioè $3 : 5 = 6 : 10$;
- $(5 - 2) : 2 = (10 - 4) : 4$ cioè $3 : 2 = 6 : 4$.

che sono ancora proporzioni (**PERCHÉ?**).

Risoluzione di una proporzione

La proprietà fondamentale permette di calcolare un termine incognito di una proporzione quando siano noti gli altri tre termini oppure, nel caso di una proporzione continua, permette di calcolare il medio proporzionale.

1) Supponiamo di avere la seguente proporzione:

$$a : b = c : x$$

nella quale a, b, c sono numeri noti e x è il termine incognito da calcolare.

Applicando la proprietà fondamentale si ha:

$$a\,x = b\,c \qquad \text{e quindi:} \qquad x = \frac{bc}{a}$$

cioè: "*il valore di un estremo incognito in una proporzione è uguale al prodotto dei medi diviso per l'estremo noto*".

2) Supponiamo di avere la seguente proporzione:

$$a : b = x : d$$

nella quale a, b, d sono numeri noti e x è il termine incognito da calcolare.

Applicando la proprietà fondamentale si ha:

$$a\,d = b\,x \qquad \text{e quindi:} \qquad x = \frac{ad}{b}$$

cioè: "*il valore di un medio incognito in una proporzione è uguale al prodotto degli estremi diviso per il medio noto*".

3) Supponiamo di avere la seguente proporzione continua:

$$a : b = b : x$$

nella quale a, b sono numeri noti e x è il termine incognito da calcolare.

Applicando la proprietà fondamentale si ha:

$$a\,x = b^2 \qquad \text{da cui:} \qquad x = \frac{b^2}{a}$$

cioè: “*in una proporzione continua, il terzo proporzionale è uguale al quadrato del secondo termine diviso per il primo termine*”.

4) Supponiamo di avere la seguente proporzione continua:

$$a : x = x : b$$

nella quale a, b sono numeri noti e x è il termine incognito da calcolare.

Applicando la proprietà fondamentale si ha:

$$x^2 = a\,b \qquad \text{da cui} \qquad x = \sqrt{ab}$$

cioè: “*in una proporzione continua, il medio proporzionale fra gli altri due termini è dato dalla radice quadrata del loro prodotto*”.

PROVA TU

Risolvi le seguenti proporzioni:

1) $x : 5 = 9 : 20$
2) $3 : 15 = x : 10$
3) $4 : 8 = 8 : x$
4) $16 : x = x : 9$

CATENA DI RAPPORTI UGUALI

La definizione di proporzione si estende al caso di tre o più rapporti uguali; precisamente si definisce **catena di rapporti uguali** l’uguaglianza di tre o più rapporti.

Ad esempio, dati i rapporti:

$$4 : 2 \quad ; \quad 8 : 4 \quad ; \quad 12 : 6 \quad ; \quad 16 : 8 \ ,$$

che sono tutti uguali a 2, si ha la seguente catena di rapporti uguali:

$$4 : 2 = 8 : 4 = 12 : 6 = 16 : 8$$

In essa, la **proprietà del comporre** si enuncia così:

In una **catena di rapporti uguali,** *la somma degli antecedenti sta alla somma dei conseguenti, come un antecedente qualsiasi sta al proprio conseguente.*

Nel caso del nostro esempio si ha:

$$(4 + 8 + 12 + 16) : (2 + 4 + 6 + 8) = 4 : 2 \quad \text{cioè:} \quad 40 : 20 = 4 : 2$$

e ancora:

$(4 + 8 + 12 + 16) : (2 + 4 + 6 + 8) =$ … **continua tu**

$(4 + 8 + 12 + 16) :$ ………………………………….

………………………………………………………

(*verifica* che, in tutti i casi, si ottiene una proporzione).

PROBLEMI SULLE PROPORZIONI

Le proprietà delle proporzioni e, in generale, delle catene di rapporti uguali, possono essere utilizzate per risolvere problemi di varia natura.

ESEMPI (di natura geometrica):

1. *Determina le lunghezze di due segmenti sapendo che la loro somma, espressa in cm, è* 40 *e che il loro rapporto è* $\frac{5}{3}$.

   Indichiamo con x e y le lunghezze, in cm, dei due segmenti (con $x > y$); possiamo scrivere:

   $$x : y = 5 : 3$$

   Applichiamo alla proporzione la proprietà del comporre (**PERCHÉ?**), così da avere:

   $$(x + y) : x = (5 + 3) : 5$$

   cioè:

   $$40 : x = 8 : 5 \qquad \text{da cui:} \quad x = \frac{40 \cdot 5}{8} = 25$$

   e quindi: $y = 40 - 25 = 15$.

2. *Determina le lunghezze di due segmenti sapendo che la loro differenza, espressa in cm, è* 4 *e che il loro rapporto è* $\frac{5}{4}$.

   Indichiamo con x e y le lunghezze, in cm, dei due segmenti (con $x > y$); possiamo scrivere:

   $$x : y = 5 : 4$$

   Applichiamo alla proporzione la proprietà dello scomporre (**PERCHÉ?**), così da avere:

   $$(x - y) : x = (5 - 4) : 5$$

   si ha:

   $$4 : x = 1 : 5 \qquad \text{da cui:} \quad x = \frac{4 \cdot 5}{1} = 20$$

   e quindi: $y = 20 - 4 = 16$.

PROVA TU

a. *Determina le lunghezze di due segmenti sapendo che la loro somma è* 66 *cm e che il loro rapporto è* $\frac{6}{5}$.

b. *Determina le lunghezze di due segmenti sapendo che la loro differenza è* 9 *cm e che il loro rapporto è* $\frac{3}{2}$.

9.5 Grandezze direttamente proporzionali

Vi sono coppie di grandezze variabili che hanno un comportamento particolare, ossia sono tali che al raddoppiare, triplicare … dell'una, raddoppia, triplica ….. *in corrispondenza* anche l'altra.

Tali grandezze si dicono **direttamente proporzionali**.

Sono esempi di grandezze direttamente proporzionali i seguenti:

- lo spazio percorso da un'automobile e i litri di benzina consumati;
- il costo di una merce e il suo peso;
- lo spazio percorso da una moto che viaggia a velocità costante e il tempo di viaggio.

"Leggi" la seguente tabella (e **COMPLETA**):

peso pane (P)	1 kg	2 kg	1/2 kg
costo pane (C)	2 euro	4 euro	1 euro
Rapporto (P/C)	1/2	1/2	1/2

Osserva che il rapporto P/C è ……………………………………….. .

Si dà, quindi, la seguente definizione:

Due grandezze variabili *a* e *b* si dicono **direttamente proporzionali** se il rapporto tra i valori corrispondenti assunti da *a* e da *b* è costante: tale costante è detta **costante di proporzionalità diretta** e viene indicata con la lettera *k*. In simboli:

$$\frac{a}{b} = k \qquad \text{ovvero} \qquad a = k \cdot b$$

OSSERVAZIONE

Due classi di grandezze in corrispondenza biunivoca si dicono, quindi, direttamente proporzionali se il rapporto tra due grandezze qualsiasi della prima classe è uguale al rapporto delle grandezze corrispondenti della seconda classe.

La verifica di tale condizione non è sempre agevole o possibile.

Vale, però, il seguente:

CRITERIO DELLA PROPORZIONALITÀ DIRETTA

Condizione necessaria e sufficiente affinché due classi di grandezze omogenee in corrispondenza biunivoca siano direttamente proporzionali è che:

1. **a grandezze uguali (congruenti) di una classe corrispondano grandezze uguali (congruenti) dell'altra classe;**
2. **alla somma di due grandezze di una classe corrisponda la somma delle due grandezze corrispondenti dell'altra classe.**

9.6 Grandezze inversamente proporzionali

Vi sono, invece, altre coppie di grandezze variabili tali che, raddoppiando, triplicando, dimezzando, … la prima grandezza, la seconda, rispettivamente, si dimezza, diviene un terzo, raddoppia, … . Tali grandezze si dicono **inversamente proporzionali**.
Sono esempi di grandezze inversamente proporzionali i seguenti:

- le basi di rettangoli equivalenti e le rispettive altezze;
- il numero di operai che svolgono un determinato lavoro e il numero di giorni necessari per portarlo a termine.

"Leggi" la seguente tabella (e **COMPLETA**):

Numero operai (o)	2	4	1
Numero di giorni (g)	6	3	12
Prodotto (o · g)	12	12	12

Dalla tabella osserviamo che il prodotto tra le due grandezze è …………………………………... .

Si dà, quindi, la seguente definizione:

Due grandezze variabili a e b si dicono **inversamente proporzionali** se il prodotto dei valori corrispondenti assunti da a e b è costante: tale costante è detta **costante di proporzionalità inversa** e viene indicata con la lettera k. In simboli:

$$a \cdot b = k \qquad \text{ovvero} \qquad a = \frac{k}{b}$$

Come **applicazione del concetto di proporzionalità tra classi di grandezze "***introduciamo*" il **teorema di Talete**.

9.7 Il teorema di Talete

Nell'unità 5 abbiamo definito il **fascio improprio** di rette (o **fascio di rette parallele**) come l'insieme di tutte le rette parallele ad una data retta r .
Abbiamo, poi, introdotto **la corrispondenza di Talete** (*una corrispondenza biunivoca*) quando abbiamo considerato due trasversali, t_1 e t_2, unitamente ai punti in cui ogni retta del fascio le intersecava (**punti corrispondenti**) e ai segmenti che avevano per estremi punti corrispondenti (**segmenti corrispondenti**) [fig. 7]:

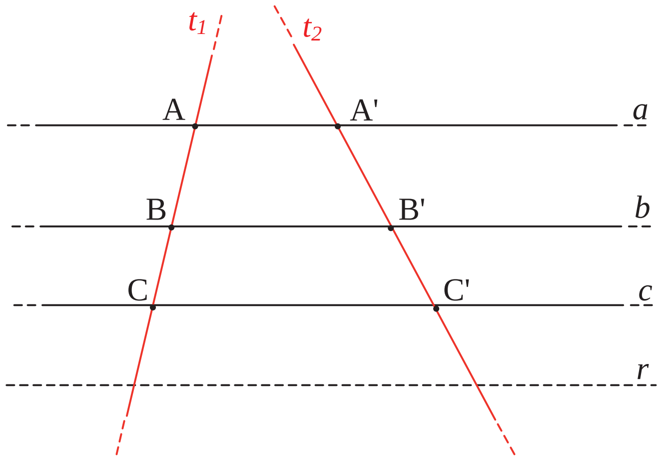


fig. 7

Abbiamo "*visto*" il TEOREMA DEL FASCIO DI RETTE PARALLELE:

Dato un fascio di rette parallele tagliato da due trasversali, a segmenti congruenti su una trasversale corrispondono segmenti congruenti sull'altra trasversale.

Abbiamo anche detto che questo teorema viene, talvolta, chiamato "**piccolo teorema di Talete**", nel senso che è una versione semplificata del "**teorema di Talete**".

Dal teorema del fascio di rette parallele abbiamo dedotto i seguenti:

COROLLARIO 1

Se per il punto medio di un lato di un triangolo si conduce la parallela ad un altro lato, questa divide il terzo lato in due segmenti congruenti.

COROLLARIO 2 (TEOREMA INVERSO)

Il segmento che unisce i punti medi di due lati di un triangolo è parallelo al terzo lato ed è congruente alla sua metà.

Sussiste il seguente:

TEOREMA DI TALETE

Un fascio di rette parallele determina su due trasversali classi di segmenti direttamente proporzionali.

[*Per dimostrare che le due classi di segmenti sono direttamente proporzionali, possiamo utilizzare il CRITERIO DELLA PROPORZIONALITÀ DIRETTA e cioè verificare che nella corrispondenza si mantengono la congruenza e la somma.*

Nella richiamata unità 5, abbiamo dimostrato che viene conservata la congruenza (teorema del fascio di rette parallele) (**PROVA TU** a "ricordare" la dimostrazione)].

Resta da dimostrare che viene conservata anche la somma; cioè che se su t_1 consideriamo un segmento PQ, congruente alla somma di due segmenti di t_1 , per esempio AB e CD, il segmento P'Q', corrispondente di PQ su t_2, è congruente alla somma dei segmenti corrispondenti, sempre su t_2, di AB e CD (fig. 8):

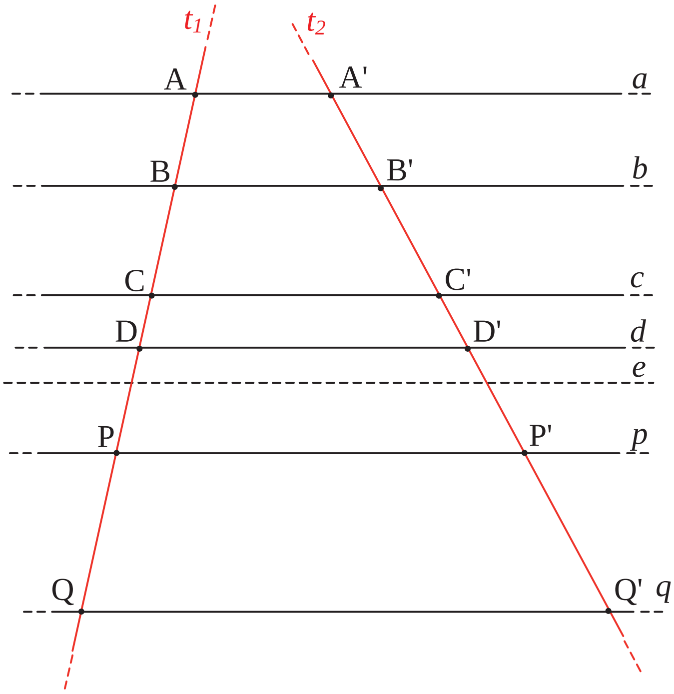


fig. 8

Dimostrazione

Poiché per ipotesi: PQ$\cong$ AB + CD,

si ha che esiste un punto R su PQ tale che:

PR$\cong$AB (“*segnare PR e AB con il simbolo* / ”) e RQ$\cong$CD (“*segnare RQ e CD con il simbolo* $*$”)

Dal punto R conduciamo la parallela *r* alle rette del fascio e indichiamo con R' il corrispondente di R su t_2 (fig. 9):

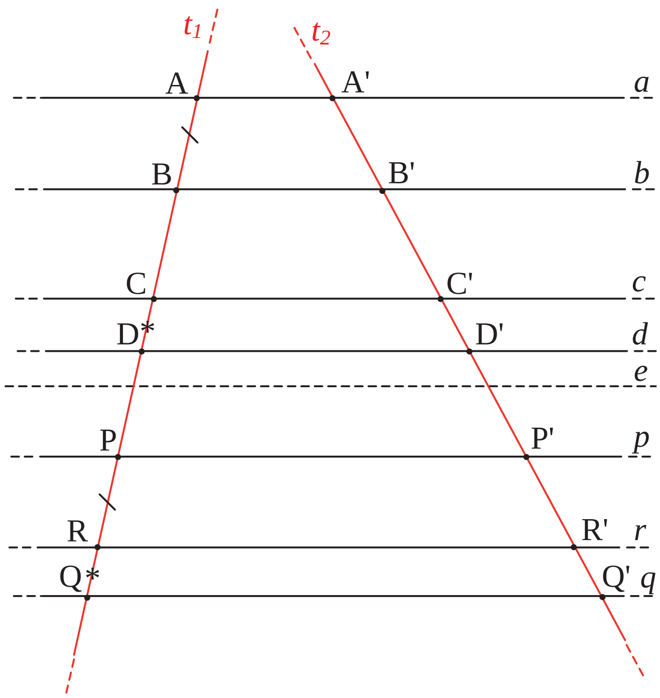


fig. 9

COMPLETA la dimostrazione in base alla fig. 9 e alla prima parte del teorema.

C.V.D.

ESERCIZI SULLE PROPORZIONI

1) Indica quali delle seguenti relazioni sono delle proporzioni:

a) $2 : 3 = 14 : 21$ b) $5 : 3 = 30 : 18$ c) $6 : 2 = 9 : 5$

d) $\frac{6}{7} = \frac{18}{21}$ e) $(1 - \frac{1}{3}) : (2 - \frac{1}{2}) = 6 : \frac{27}{2}$ f) $6 : 5 = 1{,}5 : 7{,}5$

g) $8 : 6 = (0{,}5 : 11{,}5) : 9$ h) $13 : 5 = (4{,}2 + 2{,}3) : (7 - 4{,}5)$ i) $\frac{4}{5} : \frac{3}{2} = \frac{16}{15} : 2$

2) Per ciascuna delle seguenti proporzioni, partendo dai suoi termini e applicando le diverse proprietà, costruisci altre 7 proporzioni.

a) $5 : 3 = 15 : 9$ b) $4 : \frac{4}{3} = \frac{3}{2} : \frac{1}{2}$ c) $14 : 6 = 21 : 9$

d) $6 : 4 = 3 : 2$ e) $7 : 8 = 49 : 56$ f) $3 : 7 = 15 : 35$

g) $\frac{4}{5} : \frac{3}{2} = \frac{16}{15} : 2$ h) $1{,}\overline{3} : 0.\overline{8} = 5{,}\overline{6} : 3{,}\overline{7}$ i) $10 : 15 = 14 : 21$

3) Risolvi le seguenti proporzioni:

a) $5 : 6 = 2{,}5 : x$ b) $3 : x = x : 12$ c) $x : 8 = 9 : 3$

d) $x : 7 = 96 : 24$ e) $9 : 1{,}5 = 0{,}3 : x$ f) $x : 8 = 1 : (2/3)$

g) $3 : x = x : 48$ h) $x : 45 = 5 : x$ i) $5/2 : x = 3/4 : 1/2$

l) $(3-\frac{1}{4}) : (6-\frac{1}{2}) = x : (\frac{3}{5}+\frac{37}{5})$ m) $0{,}\bar{7} : x = 0{,}\bar{4} : 1{,}\bar{7}$ n) $(\frac{1}{3}-0{,}\bar{1}) : 0{,}\bar{3} = x : (1{,}\bar{8}+\frac{1}{9})$

o) $3 : x = 6 : 10$ p) $7 : 32 = 14 : x$ q) $(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}) : 0{,}\bar{2} = 9 : x$

r) $54 : x = x : 24$ s) $\frac{3}{4} : x = x : \frac{27}{25}$ t) $0{,}\bar{6} : x = x : \frac{8}{27}$

u) $\frac{5}{3} : \frac{7}{2} = \frac{5}{21} : x$ v) $x : \frac{12}{7} = \frac{21}{4} : \frac{3}{2}$ z) $(3-\frac{7}{3})^2 : (2-\frac{5}{3})^2 = x : (1-\frac{1}{2})^2$

[a) 3; b) 6; c) 24; d) 28; e) 0,05; f) 12; g) 12; h) 15; i) 5/3; l) 4; m) 28/9; n) 4/3; o) 5; p) 64; q) 9/2; r) 36; s) 0,9; t) $0,\bar{4}$**; u) 0,5; v) 6; z) 1]**

4) Risolvi le seguenti proporzioni mediante l'uso delle proprietà relative:

a) (7+x) : x = 18 : 4

b) (x-5) : x = 12 : 27

c) x : (x-3) = 4 : 2,5

d) (5+x) : 4 = x : 1,5

e) (14-x) : x = 5 : 9

f) x : (21+x) = 2 : 9

g) 1 : x = 9 : (48+x)

h) (51-x) : 15 = x :2

i) x : (70 – x) = 8 : 6

l) x : 10 = (49 + x) : 17

m) $(\frac{7}{3}+x):\frac{9}{5}=x:(1-\frac{1}{4})$

n) $(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}):(\frac{3}{5}+\frac{1}{3})=x:(x+\frac{13}{30})$

o) (12 + x) : 29 = x : 5

p) 5 : x = 25 : (13 + x)

q) $(\frac{2}{5}+x):\frac{7}{10}=x:0{,}2$

r) $\frac{5}{6}:x=\frac{7}{2}:(\frac{8}{15}+x)$

s) $\frac{5}{8}:x=\frac{17}{24}:(\frac{4}{3}-x)$

t) $(3{,}8-x):(2-1{,}\bar{3})=x:(2-1{,}4)$

u) $\left[\left(\frac{2}{9}+\frac{4}{3}:3\right)\frac{1}{5}\right]:\left[\frac{1}{2}(0{,}2+0{,}4*3)\right]=x:(\frac{2}{3}-x)$

[a) 2; b) 9; c) 8; d) 3; e) 9; f) 6; g) 6; h) 6; i) 40; l) 70; m) 5/3; n) 1/2; o) 5/2; p) 13/4 q) 4/25; r) 1/6; s) 5/8; t) 9/5; u) 8/75]

5) Applicando le proprietà delle proporzioni, calcola due numeri conoscendo la loro somma ed il loro rapporto:

a) x + y = 21 x : y = 4 : 3

b) x + y = 75 x : y = 16 : 9

c) x + y = 100 x : y = 13 : 7

d) x + y = 85 x : y = 28 : 6

e) x + y = 88 x : y = 13 : 9

f) $x + y = 72$ $\quad x : y = 15 : 21$

g) $x + y = 17/4$ $\quad x : y = 3/4 : 2/3$

h) $x + y = 42$ $\quad x : y = 5 : 9$

i) $x + y = 16$ $\quad x : y = 1/3 : 1/5$

l) $x + y = 20$ $\quad x : y = 0,\overline{3} : 0,\overline{7}$

m) $x + y = 144$ $\quad x : y = 1,\overline{6} : 2,\overline{3}$

[a) (12; 9) ; b) (48; 27); c) (65; 35); d) (70;15); e) (52;36); f) (30;42); g) (9/4;2); h) (15;27); i) (10;6); l) (6;14); m) (60; 84)]

6) Applicando le proprietà delle proporzioni, calcola due numeri conoscendo la loro differenza ed il loro rapporto:

a) $x - y = 16$ $\quad x : y = 7 : 5$

b) $x - y = 18$ $\quad x : y = 9 : 3$

c) $x - y = 32$ $\quad x : y = 8 : 4$

d) $x - y = 24$ $\quad x : y = 17 : 13$

e) $x - y = 8$ $\quad x : y = 21 : 5$

f) $x - y = 10$ $\quad x : y = 33 : 13$

g) $x - y = 20$ $\quad x : y = 19 : 15$

h) $x - y = 40$ $\quad x : y = 13 : 5$

i) $x - y = 15$ $\quad x : y = 18 : 13$

l) $x - y = 28$ $\quad x : y = 35 : 21$

m) $x - y = 9$ $\quad x : y = 0,\overline{6} : 0,\overline{2}$

[a) (56;40); b) (27;9); c) (64;32); d) (102;78); e) (10,5;2,5); f) (16,5;6,5); g) (95;75); h) (65;25); i) (54;39); l) (70;42); m) (27/2 ; 9/2)]

7) Trova due numeri la cui somma è 28 e il cui rapporto è $\frac{3}{4}$. [12 ; 16]

8) Trova due numeri la cui differenza è 24 e il cui rapporto è $\frac{5}{3}$. [15 ; 9]

9) La differenza delle misure di due segmenti è 80 cm. Sapendo che il loro rapporto è $\frac{7}{4}$, determina la misura dei due segmenti. [196 cm ; 112 cm]

10) La somma delle misure di due segmenti è 102 cm. Sapendo che il loro rapporto è $\frac{10}{7}$, determina la misura dei due segmenti. [60 cm ; 42 cm]

11) In un triangolo, la somma delle lunghezze della base e dell'altezza ad essa relativa è 78 cm e il loro rapporto è $\frac{8}{5}$. Determina l'area del triangolo. [720 cm^2]

12) La differenza tra le dimensioni di un rettangolo è 40 cm e il loro rapporto è $\frac{3}{8}$. Determina il perimetro del rettangolo. [176 cm]

13) La somma delle dimensioni di un rettangolo è 50 cm e il loro rapporto è $\frac{9}{16}$. Determina l'area del rettangolo. [576 cm^2]

13) Un segmento AB, lungo 63 cm, viene diviso da un punto P in due parti che stanno nel rapporto $\frac{5}{4}$. Determina la lunghezza delle due parti. [AP = 35 cm ; PB = 28 cm]

14) Completa le tabelle nei due casi indicati:

a) Le grandezze *x* e *y* sono direttamente proporzionali e la costante di proporzionalità è 3:

x	12	15	18	36	42
y					

b) Le grandezze *x* e *y* sono inversamente proporzionali e la costante di proporzionalità è 48:

x	3	5	8	10	12
y					