UNITÀ 1

LA GEOMETRIA DEL PIANO

1.1 Generalità

Nello studio della geometria euclidea (da Euclide, matematico greco del III secolo a.C.) assume un ruolo fondamentale il disegno delle varie figure. A tale scopo, useremo **sempre** squadra e compasso e **costruiremo le nostre figure con la massima attenzione e precisione.**

Cominciamo il nostro lavoro ponendo l'attenzione su quelli che sono gli "oggetti", gli **enti**, che si studiano in geometria.

Per descriverli utilizzeremo delle **definizioni**. Una definizione è una frase nella quale viene associato un nome a un ente e vengono elencate le sue caratteristiche.

Esempio:

Un parallelogramma è un quadrilatero che ha i lati opposti paralleli.

Per dare una definizione è necessario conoscere il significato di alcuni termini. Nell'esempio precedente, per stabilire che cos'è un parallelogramma si deve sapere cosa significano le parole "quadrilatero", "lati", "opposti", "paralleli". Se i termini usati non sono conosciuti, si devono dare altre definizioni utilizzando altri enti che a loro volta dovranno essere definiti e così via. Per interrompere questo procedimento «a ritroso» che non può, ovviamente, continuare all'infinito è necessario che di alcuni concetti, detti ***concetti o enti primitivi,*** non venga data alcuna definizione: essi costituiranno la base sulla quale costruire l'edificio di tutte le altre definizioni.

In geometria consideriamo come enti primitivi:

- il punto;
- la retta;
- il piano.

✓ L'idea di **punto** ci è suggerita dal segno lasciato dalla punta della matita o dal forellino praticato

con un sottile spillo su un foglio di carta, da un granellino di sabbia, da una stella lontanissima, etc.

Il punto è la più semplice *figura geometrica* e l'immagine che di essa danno i riferimenti appena indicati è piuttosto imperfetta. In realtà il punto è un ente geometrico **privo di dimensioni**; esso indica solo una posizione (Euclide, nei suoi "Elementi", definisce il punto come *ciò che non ha parti*).

Per distinguere un punto dall'altro, si pone accanto a ciascuno di essi una lettera maiuscola dell'alfabeto; diremo perciò: punto A; punto B; punto C; etc.

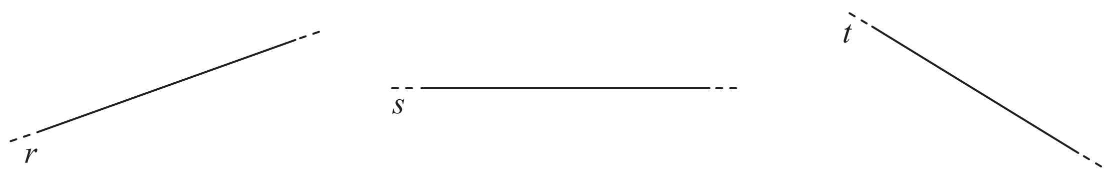
. A . B .
. C .

Un insieme qualsiasi di punti costituisce una *figura geometrica*; lo *spazio* è l'insieme di tutti i punti e contiene quindi tutte le figure.

Una figura che appartiene tutta ad un piano si chiama *figura piana*, altrimenti si chiama *figura solida*.

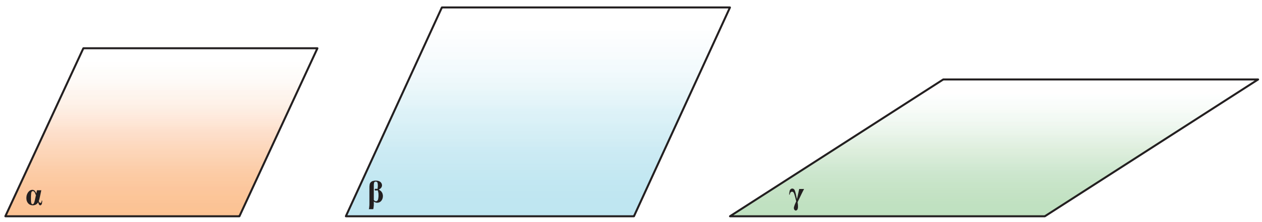
✓ Come modello intuitivo di **retta** possiamo pensare al bordo di una riga da disegno, idealmente illimitata da entrambe le parti. La retta geometrica si deve, infatti, pensare illimitata e senza spessore: è costituita da infiniti punti ed ha **un'unica dimensione** (si estende solo in lunghezza, illimitatamente).

Per distinguere una retta dall'altra, si pone accanto a ciascuna di esse una lettera minuscola dell'alfabeto; diremo perciò: retta r ; retta s ; retta t ; etc.



✓ Come modello intuitivo di **piano** possiamo pensare ad un sottile foglio di carta o alla superficie dell'acqua stagnante di un lago. Si tratta, naturalmente, di immagini molto approssimative perché il piano geometrico, oltre a non avere spessore, è indefinitamente esteso in lunghezza e larghezza: ha, cioè, **due dimensioni**.

I piani si indicano generalmente con le lettere dell'alfabeto greco; diremo perciò: piano α ; piano β ; piano γ ; etc.



Nella geometria razionale si vogliono ricavare, mediante deduzioni[1], delle proprietà da altre proprietà. Come per gli enti primitivi, bisogna, quindi, accettare che alcune proprietà vengano assunte come primitive, ossia non siano dedotte ma accettate come vere (**postulati** o **assiomi**). Le proprietà (o proposizioni) che si possono desumere dagli assiomi si dicono **teoremi**; un teorema è quindi una proposizione di cui bisogna *controllare* la verità mediante un ragionamento (**dimostrazione**). Una dimostrazione è, pertanto, una sequenza di deduzioni che, partendo da affermazioni considerate vere (**ipotesi**), fa giungere ad una nuova affermazione (**tesi**).

In seguito scriveremo spesso l'enunciato dei teoremi mediante la struttura linguistica "se ….. , allora ……".

[1] procedimenti logici consistenti nel derivare, da una o più premesse date, una conclusione come conseguenza logicamente necessaria.

La frase che segue il “se” è l’ipotesi, ossia ciò che supponiamo vero; quella dopo “allora” è la tesi, ossia l’affermazione da dimostrare.

Dimostrazione diretta

Una dimostrazione è *diretta* quando, partendo dall’ipotesi ed utilizzando eventualmente postulati e/o proprietà dimostrate in precedenza, si perviene, attraverso una sequenza di deduzioni logiche, alla tesi.

Dimostrazione indiretta o per assurdo

Una dimostrazione è *indiretta* o *per assurdo* quando, partendo dalla negazione della tesi ed utilizzando eventualmente postulati e/o proprietà dimostrate in precedenza, si perviene, attraverso una sequenza di deduzioni logiche, a qualche proprietà che è in contrasto con l’ipotesi data o con postulati o con teoremi già dimostrati (*contraddizione*). Bisogna, quindi, concludere che l’aver supposto falsa la tesi è sbagliato e che, di conseguenza, la tesi è vera (*principio di non contraddizione*: una proposizione non può contemporaneamente essere vera e falsa).

Se in un teorema vengono scambiate l’ipotesi e la tesi, si ottiene la proposizione inversa che prende il nome di **teorema inverso**.

Un teorema che è immediata conseguenza di un altro teorema viene chiamato **corollario**.

Riportiamo ora di seguito alcuni postulati che caratterizzano i punti, le rette e i piani.

- **Dati due qualunque punti distinti A e B, esiste una ed una sola retta che li contiene entrambi** (fig. 1):

(fig. 1)

Questo postulato ci assicura che due punti sono sempre **allineati**, cioè appartengono ad una stessa retta.

La retta individuata dai due punti A e B (fig. 1) viene detta anche *retta congiungente* i punti A e B, o *retta passante* per A e B o, ancora, *retta* AB.

Il precedente postulato si suole anche enunciare dicendo che *per due punti distinti passa una ed una sola retta*.

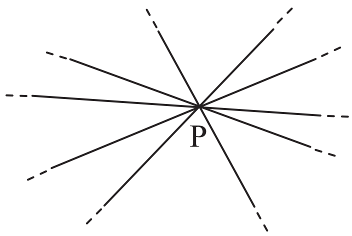
Dal precedente postulato discende il seguente <u>corollario</u>:

Due rette distinte non possono avere più di un punto in comune.

Infatti, se avessero due punti in comune, esse coinciderebbero.

- **Per un punto passano infinite rette**.

Detto P un punto del piano, l'insieme delle infinite rette passanti per P è chiamato **fascio di rette proprio** o, anche, **fascio di rette di centro P** (fig. 2):



(fig. 2)

- **Una retta può essere percorsa in due versi, l'uno opposto all'altro** (fig. 3):


(fig. 3)

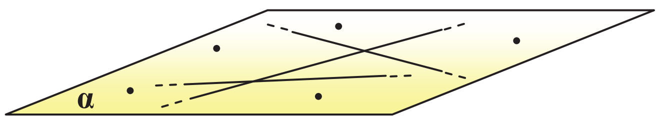
I punti di una retta si possono, infatti, pensare **ordinati** in due versi, uno opposto all'altro, in corrispondenza dei due versi secondo cui la retta può essere percorsa.

Fissato su r uno dei due versi di percorrenza (**retta orientata**) e considerati due punti A e B su r, è possibile dire se A *precede* B o se A *segue* B nel verso assegnato.

In fig. 4 si ha che A precede B (o B segue A):

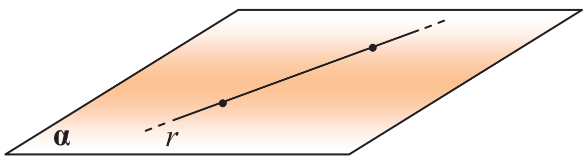
(fig. 4)

- **Su di un piano esistono infiniti punti ed infinite rette** (fig. 5):



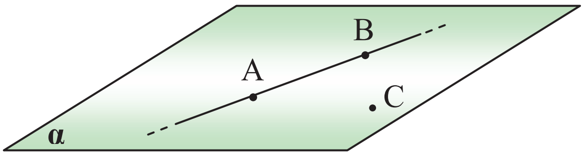
(fig. 5)

- **Se una retta r ha due punti in comune con un piano α, allora appartiene ad α** (fig. 6):



(fig. 6)

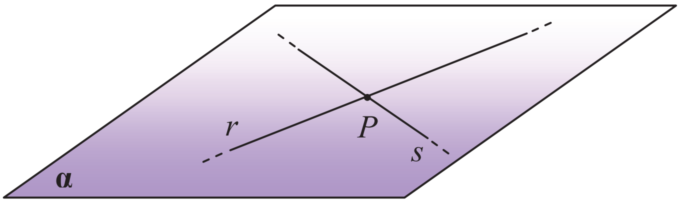
- **Tre punti distinti che non appartengono ad una medesima retta individuano uno ed un solo piano** (fig. 7):



(fig. 7)

- Due rette si dicono **complanari** se appartengono a uno stesso piano, **sghembe** se appartengono a piani diversi.

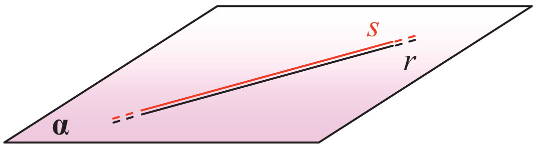
- Due rette r ed s del piano si dicono **incidenti** se hanno in comune uno ed un solo punto P che prende il nome di *punto di incidenza* (o *di incontro*, o *di intersezione*) delle rette r ed s (fig. 8):



$r \cap s = \{P\}$

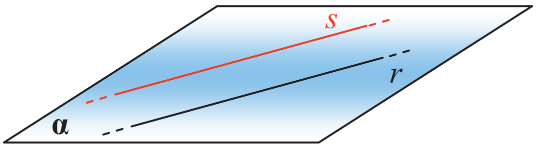
(fig. 8)

- Due rette r ed s del piano si dicono **parallele** se coincidono (fig. 9a) oppure se non hanno alcun punto in comune (fig. 9b):



$r \equiv s$

(fig. 9a)



$r \cap s = \varnothing$

(fig. 9b)

Per indicare che due rette r ed s sono parallele scriviamo r // s, dove il simbolo // è detto "simbolo di parallelismo".

[Osserviamo che abbiamo assunto come parallele anche due rette coincidenti in quanto esse hanno in comune infiniti punti e non uno solo, così come richiesto per le rette incidenti].

Parleremo ampiamente del parallelismo in altra unità.

Seguono le definizioni di nuovi enti, a partire dagli enti elementari:

- **Semiretta** – Data una retta *r* e un suo punto A, si dice *semiretta*, di origine A, ciascuna delle due parti in cui *r* rimane divisa da A, compreso lo stesso punto A (fig. 10):

(fig. 10)

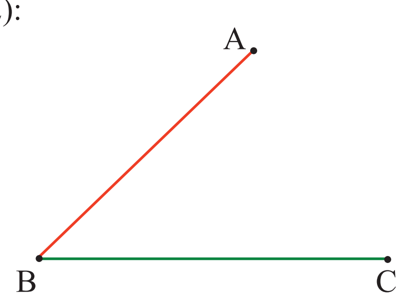
- **Segmento** – Un *segmento* è la parte di retta limitata da due suoi punti che si dicono estremi del segmento.

Il segmento di estremi A e B si indica con AB o con BA, cioè scrivendo una di seguito all'altra le lettere che indicano i suoi estremi (fig. 11):

(fig. 11)

Se i due estremi coincidono, il segmento è nullo ed è costituito da un solo punto $A \equiv B$ (non ci sono, quindi, punti interni).

- **Segmenti consecutivi** – Due segmenti si dicono *consecutivi* se hanno solo un estremo in comune (fig. 12):



AB e BC segmenti consecutivi

(fig. 12)

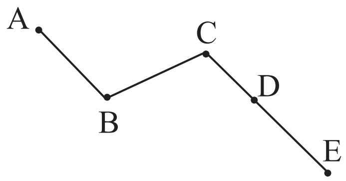
- **Segmenti adiacenti** – Due segmenti si dicono *adiacenti* se sono consecutivi ed appartengono alla stessa retta (fig. 13):

AB e BC segmenti adiacenti

(fig. 13)

PROVA TU

In relazione alla fig. 14, stabilisci quali tra le seguenti affermazioni sono vere e quali false.



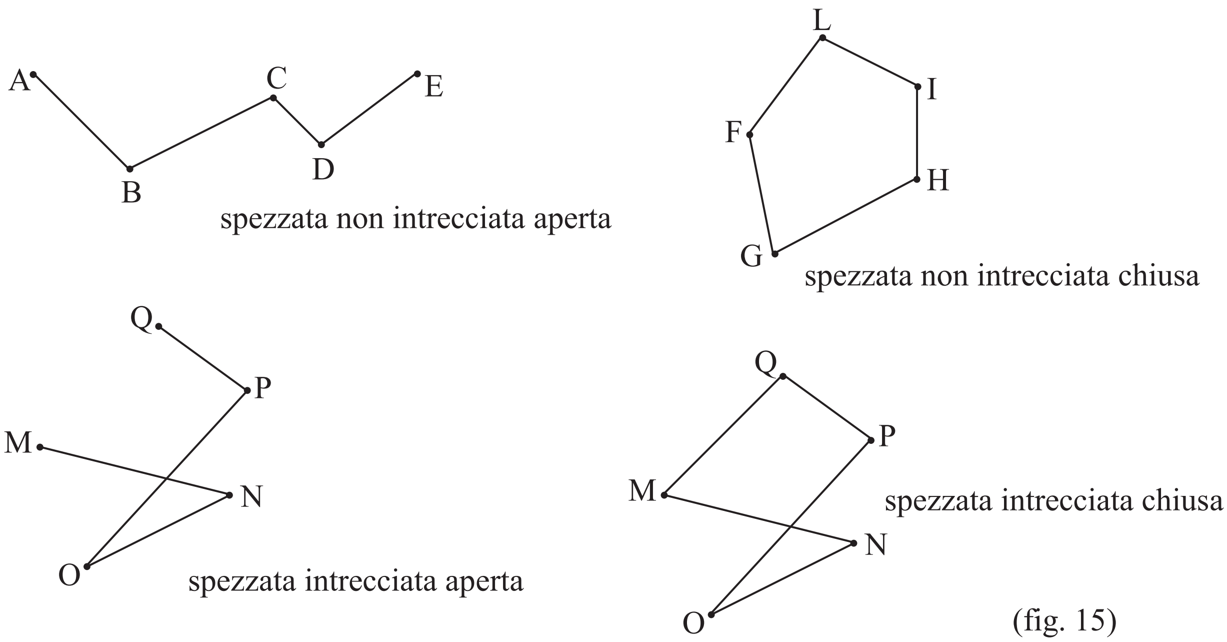
(fig. 14)

AB e BC sono adiacenti	V	F
AB e DE sono consecutivi	V	F
BC e CD sono consecutivi	V	F
CD e AB sono adiacenti	V	F
CD e DE sono adiacenti	V	F

- **Spezzata** (o **poligonale**) – Si dice *spezzata* o *poligonale* una figura geometrica formata da più segmenti, a due a due consecutivi e non adiacenti.

Una spezzata può essere (fig. 15):

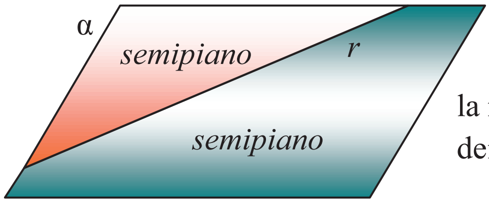
- *non intrecciata* (o *semplice*), se i segmenti della spezzata non hanno punti interni in comune;
- *intrecciata*, se almeno due segmenti hanno punti interni in comune;
- *aperta*, se l'ultimo estremo non coincide con il primo;
- *chiusa*, se l'ultimo estremo coincide con il primo.



(fig. 15)

(I segmenti AB, BC, ..… sono i *lati* della spezzata; i punti A, B, C, ... sono i *vertici* della spezzata).

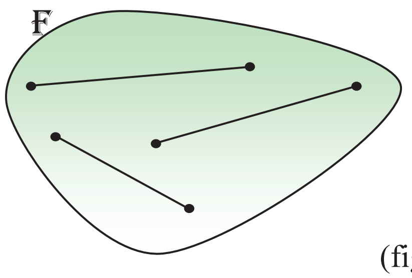
- **Semipiano** – Data una retta *r* di un piano α, si dice *semipiano* ciascuna delle due parti in cui *r* divide α (fig. 16):



la retta *r* è detta *origine*, o *frontiera*, di ciascuno dei due semipiani.

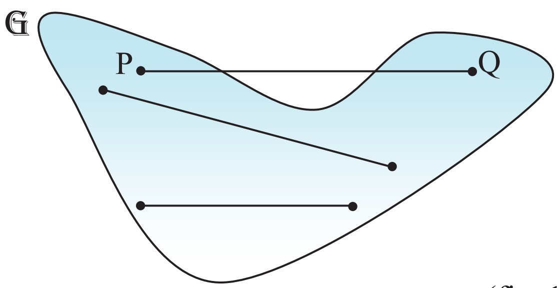
(fig. 16)

- **Figura convessa** – Una figura $\mathbb{F}$ si dice *convessa* se, considerati due suoi qualsiasi punti, il segmento che li unisce **è** completamente contenuto in $\mathbb{F}$ (fig. 17):



(fig. 17)

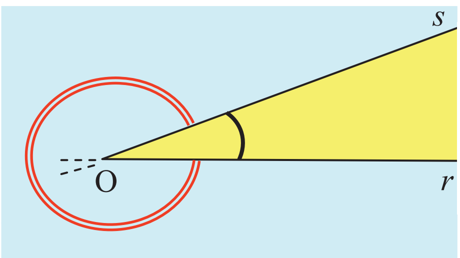
- **Figura concava** – Una figura $\mathbb{G}$ si dice *concava* se esistono almeno due punti per i quali il segmento che li unisce **non è** completamente contenuto in $\mathbb{G}$ (fig. 18):



il segmento PQ non è completamente contenuto in $\mathbb{G}$.

(fig. 18)

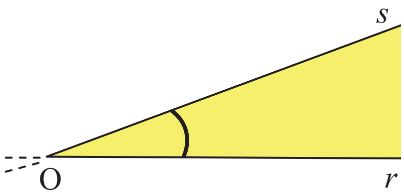
- **Angolo** – L'*angolo* è ciascuna delle due parti in cui un piano viene diviso da due semirette aventi l'origine in comune (fig. 19):



Le semirette *r* ed *s* sono dette "lati" dell'angolo; l'origine comune O è detto "vertice" dell'angolo.

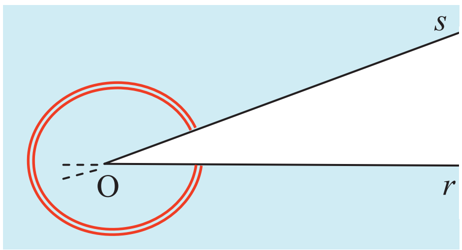
(fig. 19)

- Un angolo si dice ***convesso*** se non contiene i prolungamenti dei suoi lati (fig. 20):



(fig. 20)

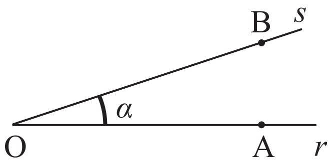
- Un angolo si dice ***concavo*** se contiene i prolungamenti dei suoi lati (fig. 21):



(fig. 21)

Quando nel seguito parleremo di angolo senza ulteriore specificazione, intenderemo sempre <u>angolo convesso</u>.

Per indicare l'angolo convesso della fig. 22 useremo una delle seguenti notazioni: $\widehat{rs}$, $\widehat{sr}$, $r\hat{O}s$, $s\hat{O}r$, $A\hat{O}B$, $B\hat{O}A$, α, e, se non ci sono ambiguità di interpretazione, $\hat{O}$.

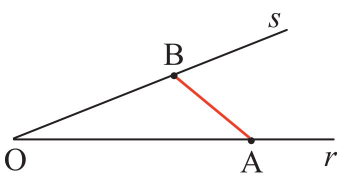


(fig. 22)

Se si vuole fare riferimento ad un angolo concavo lo si deve esprimere in maniera esplicita; così, nel caso della fig. 21, diremo "angolo $\widehat{rs}$ *concavo*" (taluni indicano tale angolo con la scrittura $\check{rs}$).

Gli aggettivi *convesso* e *concavo* sono in accordo con le definizioni date di figura convessa e di figura concava.

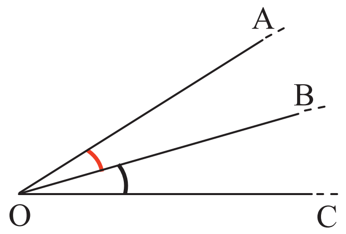
- Si dice ***corda*** di un angolo convesso un qualsiasi segmento i cui estremi appartengono ai lati dell'angolo (fig. 23):



AB corda

(fig. 23)

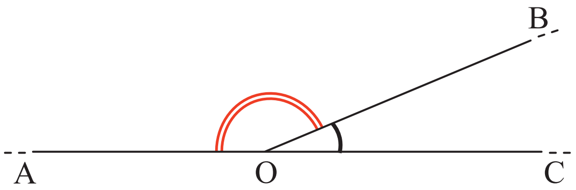
- **Angoli consecutivi** – Due angoli si dicono *consecutivi* se hanno lo stesso vertice, un lato in comune e gli altri due lati situati da parte opposta rispetto al lato comune (fig. 24):



$A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ angoli consecutivi

(fig. 24)

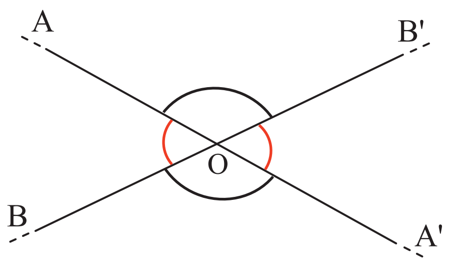
- **Angoli adiacenti** – Due angoli si dicono *adiacenti* se, oltre ad essere consecutivi, hanno i lati non comuni appartenenti ad una stessa retta (fig. 25):



$A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ angoli adiacenti

(fig. 25)

- **Angoli opposti al vertice** – Due angoli si dicono *opposti al vertice* se i lati dell'uno sono i prolungamenti dei lati dell'altro (fig. 26):



$A\hat{O}B$ e $A'\hat{O}B'$ angoli opposti al vertice;
$A\hat{O}B'$ e $A'\hat{O}B$ angoli opposti al vertice.

(fig. 26)

PROVA TU

Vero o falso?

a) Due angoli consecutivi sono anche adiacenti V F
b) Due angoli adiacenti sono anche consecutivi V F
c) Due angoli consecutivi possono essere entrambi acuti V F
d) Due angoli adiacenti possono essere entrambi acuti V F

1.2 Figure congruenti[2]

Il termine “congruente” si usa in geometria per dire che due figure possono essere sovrapposte in modo che tutti i loro punti coincidano.

Ad esempio due segmenti si dicono congruenti se è possibile sovrapporli in modo che i loro estremi (e, quindi, tutti i punti che sono tra loro) coincidano. Si usa lo stesso termine quando è possibile sovrapporre altre figure geometriche come angoli, triangoli, quadrilateri, etc.

La nozione di “sovrapponibilità” è legata a quella di “movimento rigido”, ossia di movimento di una figura senza che vi sia deformazione della stessa.

Osserviamo i due segmenti della figura seguente:

(fig. 27)

I due segmenti hanno la stessa lunghezza, cioè stessa distanza tra gli estremi dei segmenti, quindi si è soliti dire che i due segmenti sono uguali. Noi, ora, diremo che “il segmento AB è congruente al segmento CD”, e scriveremo: $AB \cong CD$ (si legge “AB è congruente a CD”).

Perché “congruente” e non “uguale”? Perché questa complicazione terminologica?

Basta osservare che i due segmenti in figura non rappresentano lo stesso oggetto geometrico, **non sono la stessa figura**; non possono, quindi, essere definiti “uguali” perché costituiti da punti diversi del piano. Una figura, pertanto, può essere uguale soltanto a se stessa mentre due figure che si corrispondono punto per punto (*corrispondenza biunivoca*) si dicono congruenti.

Si ha, quindi, la seguente definizione:

Due figure F_1 e F_2 si dicono **congruenti,** e si scrive $F_1 \cong F_2$, quando esiste un movimento rigido che le sovrappone punto a punto.

La relazione di congruenza tra figure gode delle seguenti proprietà:

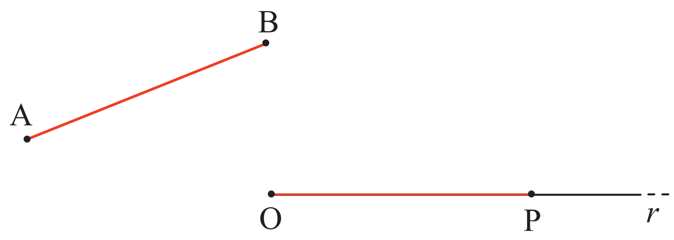
1. riflessiva: $F_1 \cong F_1$ (ogni figura è congruente a se stessa);
2. simmetrica: $F_1 \cong F_2 \Longrightarrow F_2 \cong F_1$ (se la figura F_1 è congruente alla figura F_2 , allora la figura F_2 è congruente alla figura F_1);
3. transitiva: $F_1 \cong F_2 \wedge F_2 \cong F_3 \Longrightarrow F_1 \cong F_3$ (se la figura F_1 è congruente alla figura F_2 e la figura F_2 è congruente alla figura F_3 , allora la figura F_1 è congruente alla figura F_3).

La relazione di congruenza è, quindi, una relazione di equivalenza.

[2] qui e nel seguito l’argomento viene presentato in maniera intuitiva, “legandolo” all’idea di movimento.

➢ **Assioma del trasporto di un segmento**

Dati un segmento AB e una semiretta *r* di origine O, esiste ed è unico un punto P appartenente ad *r* tale che OP $\cong$ AB (fig. 28):



(fig. 28)

Si può quindi pensare di disegnare infiniti segmenti congruenti ad un segmento dato.

La relazione di congruenza tra segmenti, essendo una relazione di equivalenza (**PROVA TU**), permette di dividere l'insieme di tutti i segmenti in *classi di equivalenza*, ognuna delle quali si chiama **lunghezza**: ad ogni classe appartengono tutti i segmenti tra loro congruenti e che hanno, quindi, la stessa lunghezza.

Confronto tra segmenti

Confrontare due segmenti vuol dire stabilire se sono congruenti o, se non lo sono, vedere quale dei due è il maggiore (o il minore).

Siano dati quindi due segmenti qualsiasi AB e CD (fig. 29):

(fig. 29)

L'assioma del trasporto ci permette il loro confronto. Consideriamo, infatti, due segmenti OP $\cong$ AB e OQ $\cong$ CD, con l'estremo O in comune ed appartenenti alla stessa semiretta *r* di origine O.

Possono verificarsi i seguenti tre casi:

- P "cade" prima dell'estremo Q, allora diciamo che OP è minore di OQ, e quindi AB è minore di CD, e scriviamo AB < CD (fig. 30a);
- P "coincide" con Q, allora i due segmenti OP e OQ, e quindi AB e CD, sono congruenti, e scriviamo AB $\cong$ CD (fig. 30b);
- P "cade" dopo l'estremo Q, allora diciamo che OP è maggiore di OQ, e quindi AB è maggiore di CD, e scriviamo AB > CD (fig. 30c).

$OP < OQ \Leftarrow AB < CD$ (fig. 30a)

$OP \cong OQ \Leftarrow AB \cong CD$ (fig. 30b)

$OP > OQ \Leftarrow AB > CD$ (fig. 30c)

Il confronto può avvenire sovrapponendo, con un movimento rigido, direttamente AB e CD, facendo coincidere l'estremo A con l'estremo C e verificando dove "cade" l'estremo B (*seguiremo tale procedimento nel confronto tra angoli*).

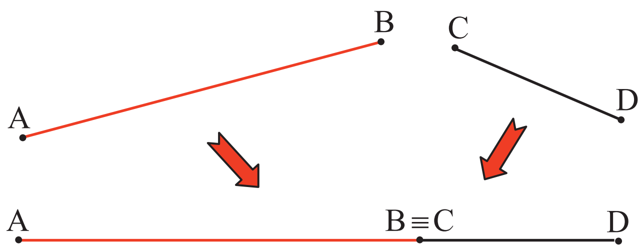
1.3 Operazioni con i segmenti

Somma di due segmenti. La *somma* di due segmenti adiacenti AB e BC è il segmento AC che ha per estremi gli estremi non comuni dei due segmenti dati (fig. 31):

(fig. 31)

Scriviamo **AB + BC = AC**, usando l'usuale simbolo di addizione (*).

Nel caso di due segmenti AB e CD non adiacenti, la loro *somma* è data dal segmento AD ottenuto trasportando, con un movimento rigido, i segmenti AB e CD in modo che siano adiacenti, con l'estremo B coincidente con C (fig. 32):



Abbiamo preferito, qui e in seguito, nonostante l'operazione di "trasporto", mantenere lo stesso nome per i segmenti.

(fig. 32)

La somma di tre o più segmenti AB, CD, EF, ….. si ottiene addizionando alla somma dei primi due segmenti il terzo e così via fino all'ultimo segmento.

(*) Nel definire le operazioni con i segmenti, così come in seguito quelle con gli angoli, invece del simbolo $\cong$, **abbiamo utilizzato** il simbolo $=$, che sta per " è il segmento …", " è l'angolo …", volendo porre l'attenzione sull'operazione in oggetto e sul risultato della stessa.

L'addizione tra i segmenti è un'operazione che gode delle proprietà commutativa e associativa.

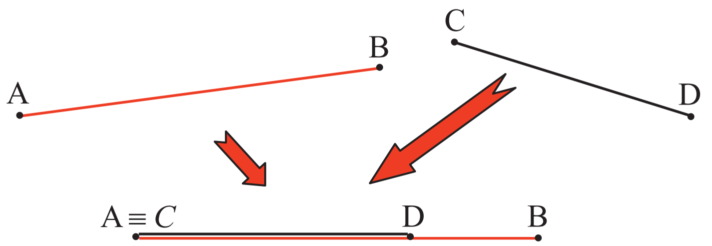
Vale la seguente proprietà:

Segmenti somme di segmenti congruenti sono congruenti.

In simboli: se $AB \cong CD$ e $EF \cong GH$ allora $AB + EF \cong CD + GH$.

PROVA TU a dimostrarla, utilizzando l'assioma del trasporto di un segmento.

Differenza di due segmenti. La *differenza* di due segmenti AB e CD, con AB $\geq$ CD, è il segmento DB che si ottiene sovrapponendo AB e CD in modo che l'estremo A coincida con l'estremo C e gli estremi D e B siano sulla stessa semiretta di origine A (fig. 33):



(fig. 33)

Scriviamo **AB – CD = DB**, usando l'usuale simbolo di sottrazione (DB è, quindi, quel segmento che sommato a CD dà per somma AB).
Se $AB \cong CD$, allora il segmento DB è il segmento nullo.

Vale la seguente proprietà:
Segmenti differenze di segmenti congruenti sono congruenti.
In simboli: se $AB \cong CD$, $EF \cong GH$ $\wedge$ AB $\geq$ EF allora $AB - EF \cong CD - GH$.
PROVA TU a dimostrarla, utilizzando l'assioma del trasporto di un segmento.

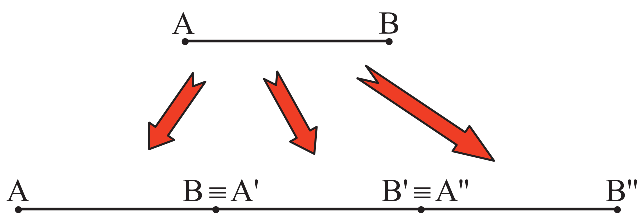
Multiplo e sottomultiplo di un segmento. Il *multiplo* di un segmento AB, secondo il numero naturale *n*, è il segmento CD che si ottiene facendo la somma di *n* segmenti congruenti ad AB; cioè:

$$CD = \underbrace{AB + AB + \ldots\ldots + AB}_{n \text{ volte}} = \boldsymbol{n \cdot AB}.$$

In particolare:
- se $n = 1$, il multiplo di AB secondo il numero 1 è il segmento AB stesso;
- se $n = 0$, il multiplo di AB secondo il numero 0 è il segmento nullo.

Se $n \neq 0$, si dice che il segmento AB è *sottomultiplo* di CD secondo il numero *n* e si scrive: $AB = \frac{1}{n} CD$ (si legge "AB è uguale a un *n*-esimo di CD" o "AB è uguale all'*n*-esima parte di CD").

In fig. 34 è $n = 3$, per cui AB" è multiplo di AB secondo il numero 3 e si scrive: AB" = 3·AB.



(fig. 34)

Sempre dalla fig. 34 si ha che il segmento AB è il sottomultiplo di AB" secondo il numero 3 e si scrive: $AB = \frac{1}{3}$ AB".

La scrittura CD = $\frac{m}{n}$AB, con $m, n \in N$ e $n \neq 0$, indica che CD è il multiplo, secondo il numero m, del sottomultiplo di AB, secondo il numero n; cioè: $CD = \frac{m}{n}AB = m \cdot \left(\frac{1}{n}AB\right)$.

In altre parole, il segmento CD è m volte l'n-esima parte di AB.

Così la scrittura CD = $\frac{5}{3}$AB indica che CD è 5 volte la terza parte di AB, cioè il segmento AB è diviso in 3 parti congruenti e CD è 5 di quelle parti (fig. 35):

(fig. 35)

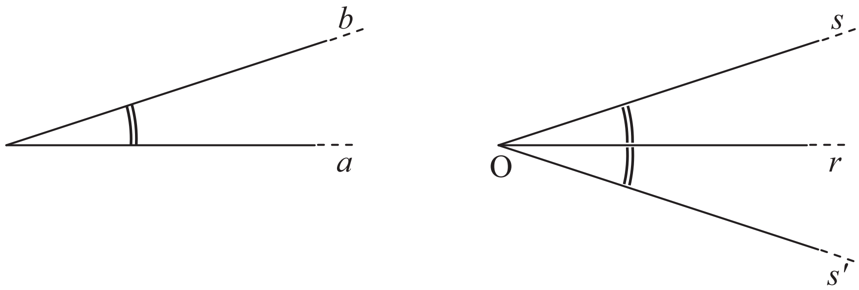
Da quanto detto sul multiplo e sottomultiplo di un segmento segue, in particolare, che un qualsiasi segmento può essere diviso in due parti congruenti.
Si ha quindi la seguente *definizione*:
Punto medio di un segmento. Dato un segmento AB, si dice *punto medio* di AB il punto M, interno ad AB, equidistante dagli estremi A e B, cioè tale che AM ≅ MB (fig. 36):

(fig. 36)

Si può dimostrare che il punto medio di un segmento è unico (**PROVA TU**).

- **Assioma del trasporto di un angolo**

Dati un angolo $\widehat{ab}$ e una semiretta r di origine O, esiste, in ognuno dei due semipiani nei quali la retta di r divide il piano, una ed una sola semiretta di origine O che forma con la semiretta data un angolo congruente ad $\widehat{ab}$ (fig. 37):



$\widehat{rs} \cong \widehat{ab}$

$\widehat{rs'} \cong \widehat{ab}$

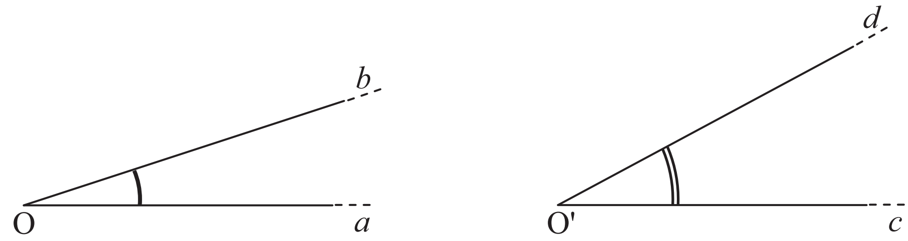
(fig. 37)

Si può quindi pensare di disegnare infiniti angoli congruenti ad un angolo dato.
La relazione di congruenza tra angoli, essendo una relazione di equivalenza (**PROVA TU**), permette di dividere l'insieme di tutti gli angoli in *classi di equivalenza*, ognuna delle quali si chiama **ampiezza**: ad ogni classe appartengono tutti gli angoli tra loro congruenti e che hanno, quindi, la stessa ampiezza.

Confronto tra angoli

Confrontare due angoli vuol dire stabilire se sono congruenti o, se non lo sono, stabilire quale dei due è il maggiore (o il minore).

Siano dati quindi due angoli qualsiasi $\widehat{ab}$ e $\widehat{cd}$ (fig. 38):

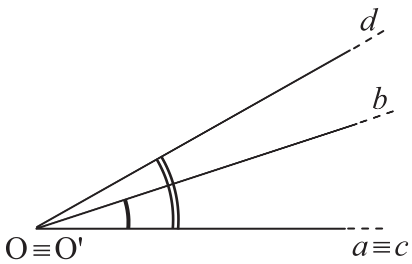


(fig. 38)

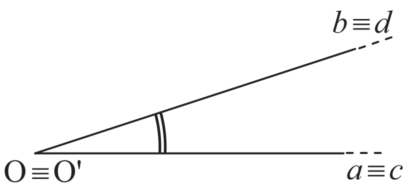
Operando un movimento rigido, sovrapponiamo i due angoli facendo coincidere i vertici ed uno dei lati, per esempio il lato *a* con il lato *c*, in modo che i due angoli si trovino dalla stessa parte rispetto al lato comune.

Possono verificarsi i seguenti tre casi:

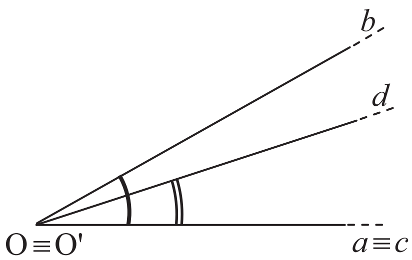
- il lato *b* è interno all'angolo $\widehat{cd}$, allora diciamo che $\widehat{ab}$ è minore di $\widehat{cd}$ e scriviamo $\widehat{ab} < \widehat{cd}$ (fig. 39a);
- il lato *b* coincide con il lato *d* e allora diciamo che $\widehat{ab}$ è congruente a $\widehat{cd}$ e scriviamo $\widehat{ab} \cong \widehat{cd}$ (fig. 39b);
- il lato *b* è esterno all'angolo $\widehat{cd}$, allora diciamo che $\widehat{ab}$ è maggiore di $\widehat{cd}$ e scriviamo $\widehat{ab} > \widehat{cd}$ (fig. 39c).



$\widehat{ab} < \widehat{cd}$ (fig. 39a)



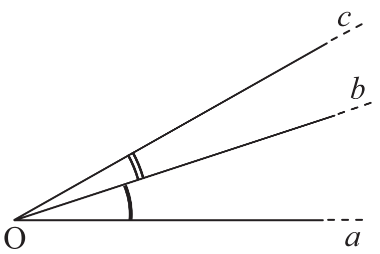
$\widehat{ab} \cong \widehat{cd}$ (fig. 39b)



$\widehat{ab} > \widehat{cd}$ (fig. 39c)

1.4 Operazioni con gli angoli

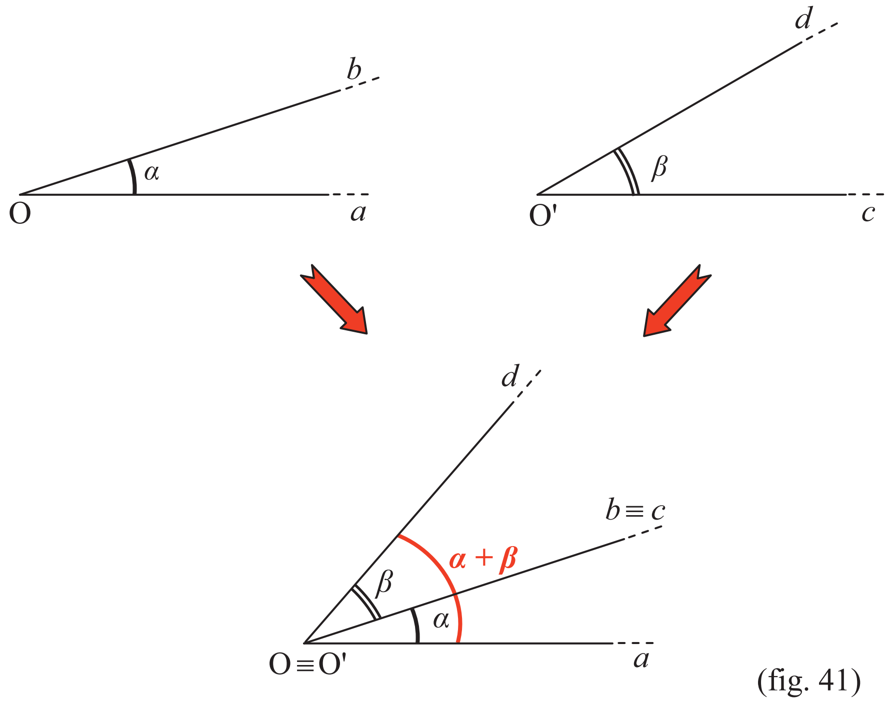
Somma di due angoli. La *somma* di due angoli consecutivi $a\widehat{O}b$ e $b\widehat{O}c$ è l'angolo $a\widehat{O}c$ che ha per vertice il vertice dei due angoli e per lati i due lati non comuni (fig. 40):



(fig. 40)

Scriviamo $\boldsymbol{a\widehat{O}b + b\widehat{O}c = a\widehat{O}c}$, usando l'usuale simbolo di addizione.

Nel caso di due angoli $a\widehat{O}b$ e $c\widehat{O'}d$ non consecutivi, la loro *somma* è data dall'angolo $a\widehat{O}d$ ottenuto disponendo, con un movimento rigido, i due angoli in modo che risultino consecutivi (fig. 41):



(fig. 41)

La somma di tre o più angoli $a\widehat{O}b$, $c\widehat{O'}d$, $e\widehat{O''}f$, … si ottiene addizionando alla somma dei primi due angoli il terzo e così via fino all'ultimo angolo.

L'addizione tra angoli è un'operazione che gode delle proprietà commutativa e associativa.

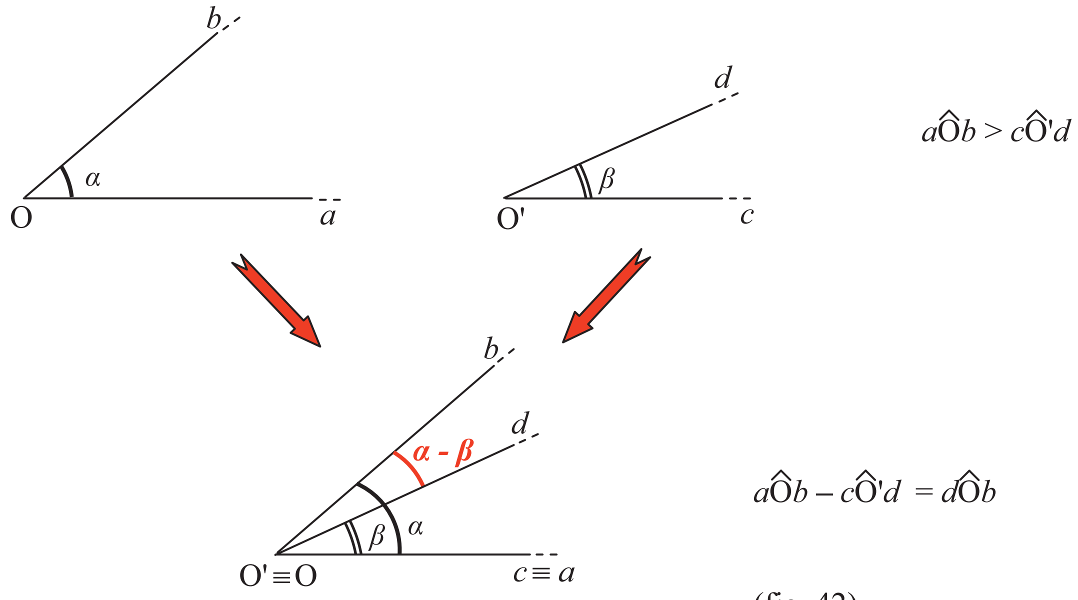
Vale la seguente proprietà:

Angoli somme di angoli congruenti sono congruenti.

In simboli: se $\alpha \cong \beta \;\wedge\; \gamma \cong \delta$ allora $\alpha + \gamma \cong \beta + \delta$.

PROVA TU, utilizzando l'assioma del trasporto di un angolo.

Differenza di due angoli. La *differenza* di due angoli $a\hat{O}b$ e $c\hat{O}'d$, con $a\hat{O}b \geq c\hat{O}'d$, è l'angolo $d\hat{O}b$ che si ottiene sovrapponendo, con un movimento rigido, $c\hat{O}'d$ ad $a\hat{O}b$, come nel caso del loro confronto (fig. 42):



(fig. 42)

Se $a\hat{O}b \cong c\hat{O}'d$, allora $d\hat{O}b$ è l'angolo nullo.

Vale la seguente proprietà:

Angoli differenze di angoli congruenti sono congruenti

In simboli: se $\alpha \cong \beta$, $\gamma \cong \delta$ $\wedge$ $\alpha \geq \gamma$ allora $\alpha - \gamma \cong \beta - \delta$.

PROVA TU, utilizzando l'assioma del trasporto di un angolo.

Multiplo e sottomultiplo di un angolo. Il *multiplo* di un angolo $\widehat{ab}$, secondo il numero naturale n, è l'angolo $\widehat{cd}$ che si ottiene facendo la somma di n angoli congruenti ad $\widehat{ab}$; cioè:

$$\widehat{cd} = \underbrace{\widehat{ab} + \widehat{ab} + \ldots.. + \widehat{ab}}_{n \text{ volte}} = \boldsymbol{n \cdot \widehat{ab}}$$

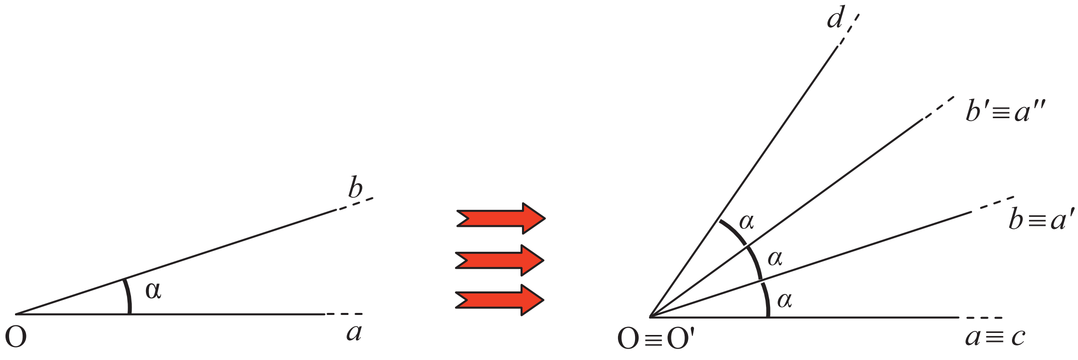
In particolare:

- se $n = 1$, il multiplo di $\widehat{ab}$ secondo il numero 1 è l'angolo $\widehat{ab}$ stesso;
- se $n = 0$, il multiplo di $\widehat{ab}$ secondo il numero 0 è l'angolo nullo.

Se $n \neq 0$, si dice che l'angolo $\widehat{ab}$ è *sottomultiplo* di $\widehat{cd}$ secondo il numero n e si scrive:

$\widehat{ab} = \frac{1}{n}\ \widehat{cd}$ (si legge " l'angolo $\widehat{ab}$ è uguale a un n-esimo dell'angolo $\widehat{cd}$ " o "l'angolo $\widehat{ab}$ è uguale all'n-esima parte dell'angolo $\widehat{cd}$ ").

In fig. 43 è $n = 3$ e quindi l’angolo $\widehat{cd}$ è multiplo dell’angolo $\widehat{ab}$ secondo il numero 3 e si scrive: $\widehat{cd} = 3 \cdot \widehat{ab}$.



(fig. 43)

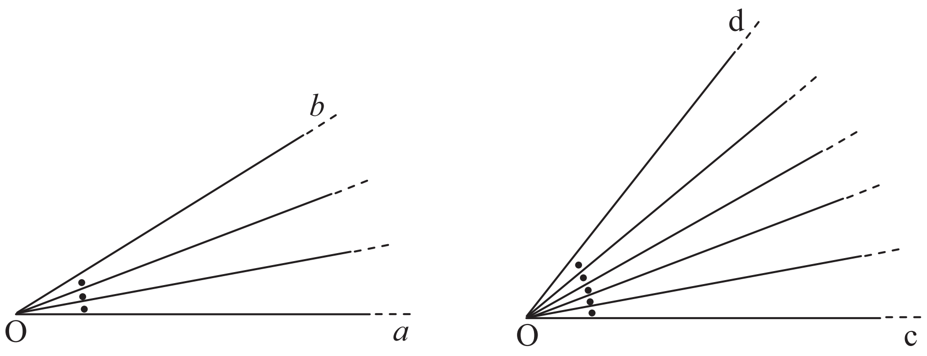
Sempre dalla fig. 43 si ha che l’angolo $\widehat{ab}$ è il sottomultiplo secondo il numero 3 dell’angolo $\widehat{cd}$ e si scrive: $\widehat{ab} = \frac{1}{3}\ \widehat{cd}$.

La scrittura $\widehat{cd} = \frac{m}{n}\ \widehat{ab}$, con m, $n \in N$ e $n \neq 0$, indica che l’angolo $\widehat{cd}$ è il multiplo, secondo il numero m, del sottomultiplo dell’angolo $\widehat{ab}$, secondo il numero n; cioè:

$$\widehat{cd} = \frac{m}{n}\ \widehat{ab} = m \cdot \left(\frac{1}{n}\widehat{ab}\right).$$

In altre parole, l’angolo $\widehat{cd}$ è m volte l’n-esima parte dell’angolo $\widehat{ab}$.

Così la scrittura $\widehat{cd} = \frac{5}{3}\ \widehat{ab}$ indica che l’angolo $\widehat{cd}$ è 5 volte la terza parte dell’angolo $\widehat{ab}$, cioè l’angolo $\widehat{ab}$ è diviso in 3 parti congruenti e l’angolo $\widehat{cd}$ è 5 di quelle parti (fig. 44):



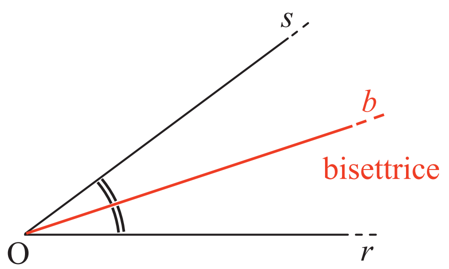
nei due angoli abbiamo *indicato* come vertice lo stesso punto O

(fig. 44)

Da quanto detto sul multiplo e sottomultiplo di un angolo, segue, in particolare, che un qualsiasi angolo può essere diviso in due parti congruenti.

Si ha quindi la seguente definizione:

Bisettrice di un angolo. Si dice *bisettrice* di un angolo la semiretta che ha origine nel vertice dell'angolo e lo divide in due angoli congruenti (fig. 45):



(fig. 45)

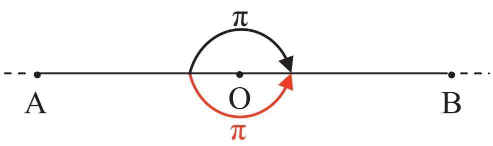
In simboli:

$$r\hat{O}b \cong b\hat{O}s$$

Si può dimostrare che la bisettrice di un angolo è unica (**PROVA TU**).

1.5 Angoli particolari

- **Angolo piatto** – Un angolo si dice *piatto* se i suoi lati sono semirette opposte. [Si può pensare ottenuto facendo ruotare la semiretta OA, intorno ad O, di mezzo giro, così da assumere la posizione OB (fig. 46)]. L'angolo piatto si suole indicare con la lettera greca π (*scoprirai il perché nel corso dei tuoi studi*).



(fig. 46)

Angolo piatto → 180°

- **Angolo giro** – Un angolo concavo i cui lati sono semirette sovrapposte si dice angolo *giro*. [Si può pensare ottenuto facendo ruotare la semiretta OA, intorno ad O, di un giro completo, descrivendo così tutto il piano (fig. 47)].

(fig. 47)

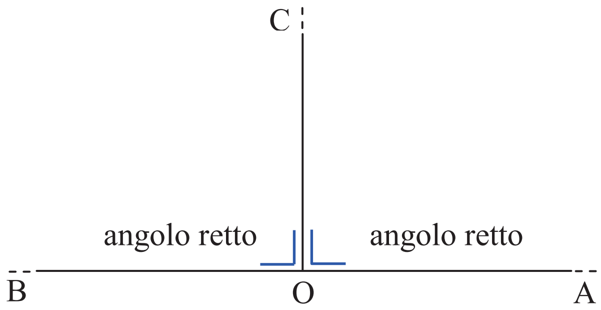
Angolo giro → 360°

- **Angolo nullo** – Un angolo convesso i cui lati sono semirette sovrapposte si dice angolo *nullo*. [Si può pensare ottenuto quando la semiretta OA rimane nella posizione iniziale, cioè se ha una rotazione nulla (fig. 48)].

Angolo nullo → 0°

(fig. 48)

- **Angolo retto** – Un angolo si dice *retto* se è la metà di un angolo piatto (fig. 49):

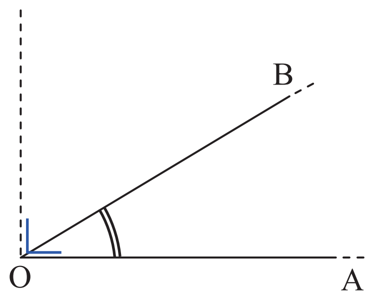


Angolo retto → 90°

OC è la bisettrice dell'angolo piatto $A\hat{O}B$.

(fig. 49)

- **Angolo acuto** – Un angolo si dice *acuto* se è minore di un angolo retto (fig. 50):

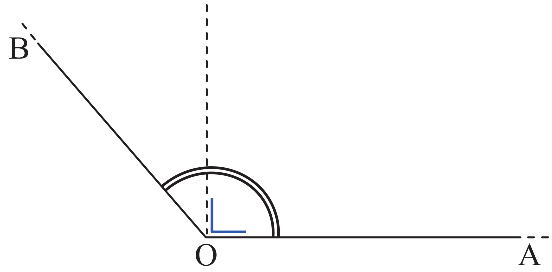


$A\hat{O}B$ angolo acuto

Angolo acuto < 90°

(fig. 50)

- **Angolo ottuso** – Un angolo convesso si dice *ottuso* se è maggiore di un angolo retto (fig. 51):

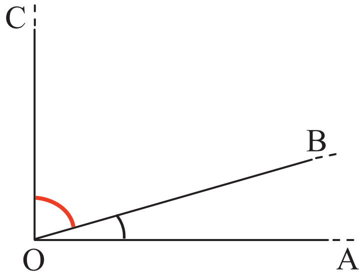


$A\hat{O}B$ angolo ottuso

Angolo ottuso > 90°

(fig. 51)

- **Angoli complementari** – Due angoli si dicono *complementari* quando la loro somma è un angolo retto (fig. 52):



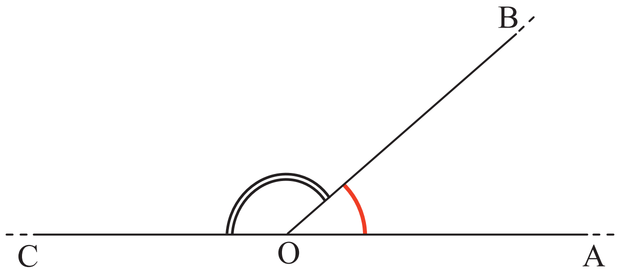
$A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ angoli complementari

$A\hat{O}C$ angolo retto

(fig. 52)

(Ovviamente i due angoli non devono essere necessariamente consecutivi).

- **Angoli supplementari** – Due angoli si dicono *supplementari* quando la loro somma è un angolo piatto (fig. 53):



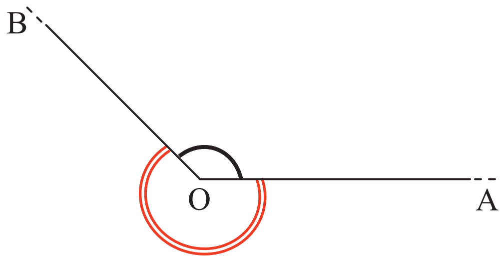
$A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ angoli supplementari

$A\hat{O}C$ angolo piatto

(fig. 53)

(Ovviamente i due angoli non devono essere necessariamente adiacenti).

- **Angoli esplementari** – Due angoli si dicono *esplementari* quando la loro somma è un angolo giro (fig. 54):



$A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ angoli esplementari

(fig. 54)

(Ovviamente i due angoli non devono avere necessariamente gli stessi lati).

PROVA TU

Esiste sempre il complementare di un angolo? Perché?

PROVA TU

Completa le seguenti affermazioni:

- il supplementare di un angolo di 85° è ampio ……….;
- il complementare di un angolo di 89° è ampio ……….;
- il complementare di un angolo di 2° è ampio ……….;
- il supplementare di un angolo di 112° è ampio ……….;
- l'esplementare di un angolo di 60° è ampio ………..;
- il supplementare di un angolo di 120° è ampio ……….;
- l'esplementare di un angolo di 107° è ampio ………. .

Vediamo alcuni teoremi sugli angoli.

TEOREMA

- ✓ **Angoli supplementari di angoli congruenti sono congruenti**.

$$\text{Hp.:} \begin{cases} \alpha \text{ supplementare di } \beta \\ \alpha_1 \text{ supplementare di } \beta_1 \\ \beta \cong \beta_1 \end{cases}$$

$$\text{Th.:} \quad \alpha \cong \alpha_1$$

Dimostrazione

Dall'ipotesi discende che:

α supplementare di $\beta \Rightarrow \alpha + \beta \cong \pi \Rightarrow \alpha \cong \pi - \beta$;

α_1 supplementare di $\beta_1 \Rightarrow \alpha_1 + \beta_1 \cong \pi \Rightarrow \alpha_1 \cong \pi - \beta_1$.

Poiché tutti gli angoli piatti sono congruenti tra loro e, per ipotesi, $\beta \cong \beta_1$ si ha:

$\pi - \beta \cong \pi - \beta_1$ perché differenze di angoli congruenti,

e quindi: $\alpha \cong \alpha_1$.

C.V.D.

(Il teorema può essere visto come un corollario della proprietà di pag.18 relativa ad angoli differenze di angoli congruenti).

L'enunciato del teorema può, ovviamente, essere formulato come segue:

Angoli supplementari di uno stesso angolo o di angoli congruenti sono congruenti.

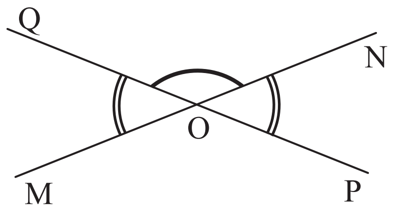
PROVA TU

In modo del tutto analogo si dimostrano i seguenti teoremi:

- **Angoli complementari di uno stesso angolo o di angoli congruenti sono congruenti**.
- **Angoli esplementari di uno stesso angolo o di angoli congruenti sono congruenti**.

TEOREMA

✓ **Due angoli opposti al vertice sono congruenti**.



Hp.: $M\hat{O}Q$ opposto al vertice di $P\hat{O}N$

Th.: $M\hat{O}Q \cong P\hat{O}N$

Dimostrazione

Basta osservare che gli angoli $M\hat{O}Q$ e $P\hat{O}N$ sono entrambi supplementari dell'angolo $Q\hat{O}N$ (poiché, per ipotesi $M\hat{O}Q$ e $P\hat{O}N$ sono angoli opposti al vertice) per cui, in base al teorema precedente, si ha:

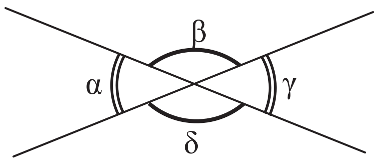
$$M\hat{O}Q \cong P\hat{O}N$$

C.V.D.

(Il teorema può essere visto direttamente come un corollario del teorema precedente).

PROVA TU

In relazione alla figura 55, stabilisci quali tra le seguenti affermazioni sono vere e quali false:



(fig. 55)

a) α e γ sono supplementari V F

b) γ e δ sono complementari V F

c) α e γ sono congruenti V F

d) β e γ sono supplementari V F

e) α e γ sono opposti al vertice V F

f) γ e β sono congruenti V F

g) β e δ sono complementari V F