CAPITOLO 16

LE EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

16.1 Equazioni di secondo grado e loro classificazione

Luca e Marta sono al bar della città di Mattown per la solita colazione.

Osservando il listino prezzi, si accorgono che i prezzi delle consumazioni sono espressi con proposizioni matematiche:

caffè	*la metà di un numero positivo tale che il suo quadrato sia uguale al doppio del numero stesso*
succo di frutta	*numero positivo tale che il quadruplo del suo quadrato sia uguale al quadrato del più piccolo numero primo dispari*
succo di arancia	*la metà di un numero positivo tale che la differenza fra il suo quadrato ed il suo triplo sia uguale al quadrato di un numero primo pari*
cappuccino	*la quarta parte di un numero positivo tale che il quadrato della differenza del numero stesso con un numero primo pari sia uguale al numero dei giorni della settimana* (*approssima il numero a meno di* $\frac{1}{100}$)
cornetto	*il doppio di un numero positivo tale che la somma fra il suo quadrato ed il suo triplo sia uguale al più piccolo numero dispari che non sia primo* (*approssima il numero a meno di* $\frac{1}{100}$)

Luca: "Che fatica per una colazione! Non ne ho più voglia! E poi, abbiamo, in tutto, solo 4 €; chissà cosa possiamo prendere!"

Marta: "Dai Luca, che ci vuole? Vedrai non sarà poi così difficile stabilire i prezzi delle consumazioni. Aspetta, fammi fare un po' di conti!"

Aiutiamo Marta a stabilire i prezzi delle consumazioni.

Formalizziamo le proposizioni del listino prezzi con i simboli della Matematica e indichiamo con $k \in \boldsymbol{R}^+$ il numero da determinare in ciascuna proposizione.

La formalizzazione è riportata nella seguente tabella:

Consumazione	**Formalizzazione**	**Prezzo**
Caffè	$k^2 = 2k$	$\frac{k}{2}$
Succo di frutta	$4k^2 = 9$	k
Succo di arancia	$k^2 - 3k = 4$	$\frac{k}{2}$
Cappuccino	$(k-2)^2 = 7$	$\frac{k}{4}$
Cornetto	$k^2 + 3k = 1$	$2k$

Osserviamo che ciascuna proposizione è formalizzata da un'equazione di secondo grado; riduciamole a forma normale:

a) $k^2 = 2k \Rightarrow k^2 - 2k = 0$;

b) $4k^2 = 9 \Rightarrow 4k^2 - 9 = 0$;

c) $k^2 - 3k = 4 \Rightarrow k^2 - 3k - 4 = 0$;

d) $(k-2)^2 = 7 \Rightarrow (k-2)^2 - 7 = 0 \Rightarrow k^2 - 4k + 4 - 7 = 0 \Rightarrow k^2 - 4k - 3 = 0$;

e) $k^2 + 3k = 1 \Rightarrow k^2 + 3k - 1 = 0$.

Possiamo, allora, generalizzare:

- una **equazione di secondo grado**, in una variabile (in genere, indicata con la lettera x), **ridotta a forma normale** è del tipo $\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$ con $a \in \mathbf{R} - \{0\} \wedge b, c \in \mathbf{R}$.

Perché $a \neq 0$? ……………………………………………………………………….. (Completa)

Osserviamo la forma del polinomio al primo membro di ciascuna delle equazioni ottenute:

- nelle equazioni **a)** e **b)** il polinomio di secondo grado **non è completo**;precisamente:
  - ✓ nell'equazione **a)** ***manca*** il termine di **grado 0**;
  - ✓ nell'equazione **b)** ***manca*** il termine di **primo grado**;
- nelle equazioni **c)**, **d)**, **e)** il polinomio di secondo grado è **completo**.

Classifichiamo, allora, le equazioni di secondo grado in base alla forma del polinomio:

Valori di b e di c ($a \neq 0$)	**Nome dell'equazione**	**Forma normale dell'equazione**
$b = 0 \wedge c = 0$	**monomia**	$ax^2 = 0$
$b = 0 \wedge c \neq 0$	**pura**	$ax^2 + c = 0$
$b \neq 0 \wedge c = 0$	**spuria**	$ax^2 + bx = 0$
$b \neq 0 \wedge c \neq 0$	**completa**	$ax^2 + bx + c = 0$

16.2 Risoluzione di un'equazione di secondo grado

Marta si rende subito conto che è in grado di risolvere le equazioni **a)**, **b)** e **c)** perché è possibile ricondurle ad equazioni di ………… grado; infatti:

a) $k^2 - 2k = 0 \;\Rightarrow\; k(\ldots.-\ldots.) = 0 \;\Rightarrow\; k = \ldots.. \vee\; k = \ldots..$

(Marta applica la legge di ………..……………..…….. ……. ………………………………);

b) $4k^2 - 9 = 0 \;\Rightarrow\; (2k-3)(2k+3) = 0 \;\Rightarrow\; k = \pm\boxed{\frac{\ldots.}{\ldots.}}$;

c) $k^2 - 3k - 4 = 0 \;\Rightarrow\; (k+1)(\ldots.-\ldots.) = 0 \;\Rightarrow\; k = \ldots\ldots \;\vee\; k = \ldots\ldots$.

Luca: "*Brava Marta; mi sembra, però, che le altre equazioni siano un po' diverse da queste*."

Marta, dopo averci pensato un po', chiama Luca:

Marta: "*Luca, mi è venuta un'idea. Riusciremo a trovare le soluzioni dell'equazione* **d)**.

Guarda, se poniamo A = $k-2$, *l'equazione* **d)** *diventa*: $A^2 = 7$; *e, quindi*:

$$A^2 = 7 \;\Rightarrow\; A = \pm\sqrt{\ldots.}$$

Sostituendo ad A *l'espressione precedente, otteniamo*:

$$k - 2 = \pm\sqrt{7} \;\Rightarrow\; k = \ldots.. \pm \sqrt{7} \;\Rightarrow\; k = \ldots.. - \sqrt{7} \;\vee\; k = \ldots.. + \sqrt{7}\,.$$

Luca: "*Bella idea, Marta! Ma, … l'ultima equazione?*"

Marta: "*Dai Luca, non diamoci per vinti!*"

E dopo qualche minuto:

Marta: "*Eureka! Luca, ho trovato il modo di risolvere l'ultima equazione*.

Stai attento: se al binomio $k^2 + 3k$ *aggiungiamo* $\frac{9}{4}$ *esso diventa il quadrato di* (k + …….)

Allora, applicando il ……….. principio di equivalenza delle equazioni, trasformiamo l'equazione:

$$k^2 + 3k = 1 \;\Rightarrow\; k^2 + 3k + \frac{9}{4} = 1 + \frac{9}{4} \;\Rightarrow\; \left(k + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}$$

Ponendo $A = k + \frac{3}{2}$, *otteniamo*:

$$\left(k + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{13}{4} \;\Rightarrow\; A^2 = \frac{13}{4} \;\Rightarrow\; A = \pm\sqrt{\frac{\ldots.}{\ldots.}} \;\Rightarrow\; k + \frac{3}{2} = \pm\sqrt{\frac{\ldots.}{\ldots.}} \;\Rightarrow\; k = -\frac{\ldots.}{\ldots.} \pm \frac{\sqrt{\ldots.}}{2}$$

Le soluzioni dell'equazione sono $\quad k = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{\ldots.}}{2} \;\vee\; k = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{\ldots.}}{2}$.

Luca e Marta, adesso, sono riusciti a stabilire i prezzi delle consumazioni.

Completa, adesso, il listino prezzi:

Consumazione	**Formalizzazione**	**Prezzo**	**Prezzo in €**
Caffè	$k^2 = 2k$	$\frac{k}{2}$	
Succo di frutta	$4k^2 = 9$	k	
Succo di arancia	$k^2 - 3k = 4$	$\frac{k}{2}$	
Cappuccino	$(k-2)^2 = 7$	$\frac{k}{4}$	
Cornetto	$k^2 + 3k = 1$	$2k$	

Marta e Luca che cosa potranno ordinare per la loro colazione?

....

....

....

....

....

Osservando il procedimento seguito da Marta per risolvere le precedenti equazioni, possiamo generalizzare e descrivere come si procede per risolvere i diversi tipi di equazioni di secondo grado.

Equazioni incomplete

- **Equazione pura**: $ax^2 + c = 0$.

  Si risolve applicando il seguente procedimento:

  - si porta il termine noto c al secondo membro: $ax^2 = -c$
  - si ricava x^2: $x^2 = -\frac{c}{a}$
  - si determina x: $\boxed{x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}} \Rightarrow S = \left\{\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}\right\}}$

  Osservazione

  Ricordiamo che un radicale di indice pari è un numero reale soltanto se il radicando è non negativo; quindi, poiché $c \neq 0$, si ha:

❖ ***a* e *c* discordi** $\Rightarrow$ $-\frac{c}{a} > 0$ $\Rightarrow$ l'equazione ha due **soluzioni opposte**:

$$\boxed{x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}},\ x_2 = +\sqrt{-\frac{c}{a}}} \Rightarrow \text{S} = \left\{\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}\right\}$$

❖ ***a* e *c* concordi** $\Rightarrow$ $-\frac{c}{a} < 0$ $\Rightarrow$ l'equazione **non ha soluzioni in *R***; quindi S = ∅.

❖ Le **soluzioni** di un'**equazione pura**, se esistono, sono **opposte**.

Esempio

Risolviamo le seguenti equazioni pure:

a) $2x^2 - 3 = 0$; **b)** $y^2 + 4 = 0$

a) $2x^2 - 3 = 0$

- portiamo al secondo membro il numero −3: $2x^2 = 3$;
- ricaviamo x^2: $x^2 = \frac{3}{2}$;
- determiniamo *x*: $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Le soluzioni sono $x_1 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$, $x_2 = +\sqrt{\frac{3}{2}}$

L'insieme soluzione è, quindi, S = $\left\{\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right\}$.

b) $y^2 + 4 = 0$

Risolviamo questa equazione in due modi:

1) osserviamo che:

$$\left.\begin{matrix}\forall y \in \boldsymbol{R},\ y^2 \geq 0 \\ 4 > 0\end{matrix}\right\| \Rightarrow \forall y \in \boldsymbol{R},\ y^2 + 4 > 0 \Rightarrow \forall y \in \boldsymbol{R},\ y^2 + 4 \neq 0 \Rightarrow \text{S} = \varnothing$$

2) i coefficienti *a* e *c* dell'equazione sono concordi, quindi $-\frac{c}{a} < 0$ $\Rightarrow$ S = ∅.

▲ **Equazione spuria**: $ax^2 + bx = 0$

Si risolve applicando il seguente procedimento:

➢ Poiché *x* è comune ad entrambi i termini del primo membro dell'equazione, possiamo fare il raccoglimento a fattor comune; si ottiene:

$$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0$$

➢ Applicando la legge di annullamento del prodotto si ha:

$$x(ax+b)=0 \Rightarrow x=0 \vee ax+b=0$$

➢ Le due soluzioni cercate sono:

$$\boxed{x_1=0,\quad x_2=-\frac{b}{a}}$$

L'insieme soluzione è S = $\left\{0, -\frac{b}{a}\right\}$

Osservazione

L'equazione **spuria** ammette **sempre due soluzioni reali e distinte** di cui una è ***x* = 0**.

Esempio

Risolviamo l'equazione spuria $3x^2-5x=0$

$$3x^2-5x=0 \Rightarrow x(3x-5)=0 \Rightarrow x=0 \vee 3x-5=0$$

Pertanto le soluzioni sono: $x=0 \vee x=\frac{5}{3} \Rightarrow$ S = $\left\{0, \frac{5}{3}\right\}$.

- **Equazione monomia**: $ax^2=0$

  Per risolvere questo tipo di equazione è sufficiente ricordare la legge di annullamento del prodotto:

$$ax^2=0 \Rightarrow (\text{poichè } a\neq 0)\ x^2=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow \text{S}=\{0\}$$

PROVA TU

Risolvi le seguenti equazioni incomplete:

a) $4x^2-9=0$; $3x^2+5=0$; $2x^2-7=0$; $-5x^2=0$

b) $x^2-2x=0$; $4x^2+7x=0$; $3x-\sqrt{3}x=0$; $\sqrt{\frac{1}{2}}x^2=0$

Equazione completa: $ax^2+bx+c=0$

Ripetiamo, nel caso generale, il procedimento seguito da Marta per risolvere le equazioni complete di secondo grado.

Osserva i seguenti passaggi:

1. consideriamo l'equazione: $ax^2+bx+c=0$
2. Applichiamo il secondo principio di equivalenza e moltiplichiamo per $4a$ primo e secondo membro dell'equazione:

$$4a^2x^2+4abx+4ac=0 \qquad (2)$$

3. trasportiamo il termine noto $4ac$ al secondo membro:

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac \qquad (3)$$

4. Applichiamo il primo principio di equivalenza e sommiamo il termine b^2 ad entrambi i membri dell'equazione (3) :

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac \qquad (4)$$

5. il primo membro dell'equazione (4) è il quadrato di un binomio:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac \qquad (5)$$

6. da cui :

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \qquad (6)$$

7. ricaviamo la variabile x dall'equazione (6); si ottiene:

$$\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$ o anche, come si è soliti scrivere, $$\boxed{\boldsymbol{x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}}$$

La formula così ottenuta prende il nome di **formula risolutiva** delle equazioni di secondo grado.

La formula risolutiva permette di determinare le **soluzioni**, dette anche radici, di un'equazione di secondo grado.

In particolare, poiché per convenzione, $x_1 < x_2$, si ha:

la soluzione minore	la soluzione maggiore
$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Osserviamo che, nella formula risolutiva delle equazioni di secondo grado, è presente un radicale di indice pari $\left(\sqrt{b^2 - 4ac}\right)$; esso è un numero reale soltanto se il radicando non è negativo.

Dal discriminante… al numero delle soluzioni

L'espressione $b^2 - 4ac$, che compare sotto il segno di radice, prende il nome di **discriminante** e viene indicata con la lettera Δ (delta) dell'alfabeto greco.

In relazione al valore di $\Delta = b^2 - 4ac$ si possono presentare tre casi:

- $\Delta > 0$:
  - l'equazione ammette due soluzioni reali e distinte (x_1, x_2)

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Rightarrow S = \left\{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}$$

- $\Delta = 0$:
  - si ottiene $\quad x = \dfrac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{x = -\frac{b}{2a}}} \Rightarrow S = \left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$

  L'equazione, dunque, ha una sola soluzione.

  In questo caso è consuetudine dire che l'equazione ha **due soluzioni reali coincidenti** oppure che $x = -\dfrac{b}{2a}$ è una **soluzione doppia**.

- $\Delta < 0$:
  - in R non esiste la radice con indice pari di un numero negativo, quindi l'equazione non ha soluzioni reali; l'equazione, perciò, è **impossibile**. Quindi, S = ∅.

Per stabilire il numero di soluzioni di un'equazione di secondo grado, è sufficiente determinare il valore del discriminante e stabilirne il segno, come riportato nella seguente tabella:

Δ > 0	**Δ = 0**	**Δ < 0**
2 sol.	**1 sol.**	**0 sol.**

Esempi

Stabiliamo il numero delle soluzioni delle seguenti equazioni:

a) $3t^2 - 4t + 1 = 0$; **b)** $x^2 + 2x + 1 = 0$; **c)** $2u^2 + 3u + 5 = 0$

a) I coefficienti di questa equazione sono: $a = 3$; $b = -4$; $c = 1$.

Determiniamo il valore del discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 16 - 12 = 4 \Rightarrow \boxed{\Delta > 0}$$

L'equazione ha, dunque, **due soluzioni distinte**.

b) I coefficienti di questa equazione sono: $a = 1$; $b = 2$; $c = 1$.

Determiniamo il valore del discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{\Delta = 0}$$

L'equazione, dunque, ha una sola soluzione reale (o due soluzioni reali e coincidenti).

c) I coefficienti di questa equazione sono: $a = 2$; $b = 3$; $c = 5$.

Determiniamo il valore del discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 9 - 40 = -31 \Rightarrow \boxed{\Delta < 0}$$

L'equazione, dunque, non ha soluzioni in $\boldsymbol{R}$.

PROVA TU

Completa la seguente tabella:

Equazione	*a*	*b*	*c*	**Δ = *b*² – 4*ac***	n° delle soluzioni reali
$2x^2 - x - 1 = 0$					
	1	–6	9		
				$\Delta = 2^2 - 4(3)(1)$	
	–2		–3	$\Delta = (-4)^2 - 4(\ldots)(\ldots)$	
$5a^2 + 3a - 2 = 0$					
	4	12		$\Delta = (\ldots)^2 - 4(4)(9)$	

Esempi

Determiniamo l'insieme soluzione delle seguenti equazioni:

a) $s^2 + 6s + 5 = 0$; **b)** $2x^2 - 7x + 5 = 0$; **c)** $4z^2 - 4z + 1 = 0$;

d) $2a^2 + 3a - 1 = 0$; **e)** $m^2 - 4m - 2 = 0$ **f)** $2x^2 - 5x + 4 = 0$;

a) I coefficienti di questa equazione sono: $a = 1$; $b = 6$; $c = 5$.

Determiniamo il valore del discriminante: $\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 36 - 20 = 16 \Rightarrow \Delta > 0$

L'equazione ha due soluzioni distinte; applichiamo la formula risolutiva trovata in precedenza:

$$s_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow s_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm 4}{2} = \begin{cases} s_1 = \dfrac{-6-4}{2} = \dfrac{-10}{2} = -5 \\ s_2 = \dfrac{-6+4}{2} = \dfrac{-2}{2} = 1 \end{cases}$$

Quindi, l'insieme soluzione è $S = \{-5, 1\}$.

b) I coefficienti di questa equazione sono: $a = 2$; $b = -7$; $c = 5$.

Determiniamo il valore del discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 49 - 40 = 9 \Rightarrow \Delta > 0$$

L'equazione ha due soluzioni reali distinte; applichiamo la formula risolutiva:

$$x_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}\ \Rightarrow\ x_{1/2}=\frac{7\pm\sqrt{9}}{2\cdot 2}=\frac{7\pm 3}{4}=\begin{cases} x_1=\dfrac{7-3}{4}=\dfrac{4}{4}=1 \\ x_2=\dfrac{7+3}{4}=\dfrac{10}{4}=\dfrac{5}{2}\end{cases}$$

Quindi, l'insieme soluzione è S = $\left\{1, \frac{5}{2}\right\}$.

c) I coefficienti di questa equazione sono: $a = 4$; $b = -4$; $c = 1$.

Determiniamo il valore del discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\cdot 4\cdot 1 = 16-16 = 0 \Rightarrow \Delta = 0$$

L'equazione ha una soluzione reale (o due soluzioni reali coincidenti); in questo caso:

$$z=-\frac{b}{2a}\ \Rightarrow\ z=-\frac{-4}{2\cdot 4}=\frac{1}{2}$$

Quindi, l'insieme soluzione è S = $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

d) I coefficienti di questa equazione sono: $a = 2$; $b = 3$; $c = -1$.

Determiniamo il valore del discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4\cdot 2\cdot(-1) = 9+8 = 17 \Rightarrow \Delta > 0$$

L'equazione ha due soluzioni reali distinte; applichiamo la formula risolutiva:

$$a_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}\ \Rightarrow\ a_{1/2}=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2\cdot 2}=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}=\begin{cases} a_1=\dfrac{-3-\sqrt{17}}{4} \\ a_2=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{4}\end{cases}$$

Quindi, l'insieme soluzione è S = $\left\{\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}\right\}$.

e) I coefficienti di questa equazione sono: $a = 1$; $b = -4$; $c = -2$.

Determiniamo il valore del discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\cdot 1\cdot(-2) = 16+8 = 24 \Rightarrow \Delta > 0$$

L'equazione ha due soluzioni distinte; applichiamo la formula risolutiva trovata in precedenza:

$$m_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}\ \Rightarrow\ m_{1/2}=\frac{4\pm\sqrt{24}}{2\cdot 1}=\frac{4\pm\sqrt{2^3\cdot 3}}{4}=\frac{4\pm 2\sqrt{6}}{4}=\frac{2\left(2\pm\sqrt{6}\right)}{4}=2\pm\sqrt{6}=\begin{cases} m_1=\dfrac{2-\sqrt{6}}{2} \\ m_2=\dfrac{2+\sqrt{6}}{2}\end{cases}$$

L'insieme soluzione, quindi, è S = $\left\{\frac{2\pm\sqrt{6}}{2}\right\}$.

f) I coefficienti di questa equazione sono: $a = 2$; $b = -5$; $c = 4$.

Determiniamo il valore del discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = 25 - 32 = -7 \Rightarrow \Delta < 0.$$

L'equazione, quindi, non ha soluzioni in $\boldsymbol{R}$; l'insieme soluzione è $S = \varnothing$.

Osservazione

Se, nell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$, ***a* è negativo**, prima di applicare la formula risolutiva, è opportuno cambiare di segno a tutti i termini dell'equazione moltiplicando primo e secondo membro per -1.

PROVA TU

Determina l'insieme soluzione delle seguenti equazioni:

$-3a^2 + 5a + 2 = 0$; $4t^2 - 3t - 2 = 0$

$h^2 + 3h + 1 = 0$; $2y^2 + 12y + 18 = 0$

Completa la seguente tabella:

$ax^2 + bx + c = 0$	a	b	c	Δ	x_1, x_2
$3x^2 + 2x - 1 = 0$					$x_1 =$.................. ; $x_2 =$ ....
$x^2 - 4x + 2 = 0$					$x_1 =$.................. ; $x_2 =$ ....
$9x^2 + 22x - 15 = 0$					$x_1 =$.................. ; $x_2 =$ ....
$5x^2 - 8x + 3 = 0$					$x_1 =$.................. ; $x_2 =$ ....

Osserva la tabella e completa le seguenti proposizioni scegliendo il termine opportuno fra quelli indicati in parentesi:

- in ciascuna delle equazioni il coefficiente b è un numero …………………… (pari, dispari);
- il valore del discriminate è un multiplo di …….. (3, 4, 5);
- le soluzioni delle equazioni sono espresse da frazioni nelle quali sia il numeratore che il denominatore sono numeri reali contenenti il fattore …… (2, 3, 4).

Generalizziamo e consideriamo l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ in cui il coefficiente ***b*** è **pari**.

$$\boldsymbol{b} \ \textbf{pari} \Rightarrow \boldsymbol{b = 2\beta} \ \Rightarrow \ \boldsymbol{\beta = \frac{b}{2}}$$

L’equazione diventa: $ax^2+2\beta x+c=0$

Calcoliamo il discriminante:

$$\Delta=b^2-4ac=\left(2\beta\right)^2-4ac=4\beta^2-4ac=4\left(\beta^2-ac\right)$$

Se $\Delta \geq 0$, applichiamo la formula risolutiva:

$$x_{1/2}=\frac{-2\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2\beta\pm\sqrt{4\left(\beta^2-ac\right)}}{2a}=\frac{-2\beta\pm2\sqrt{\beta^2-ac}}{2a}=$$

$$=\frac{2\left(-\beta\pm\sqrt{\beta^2-ac}\right)}{2a}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-ac}}{a}=\frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac}}{a}$$

In definitiva, se b è pari e $\Delta \geq 0$, la formula che permette di determinare le soluzioni dell’equazione è la seguente:

$$\boxed{x_{1/2}=\frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac}}{a}}$$

Osserviamo che $\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac=\frac{b^2}{4}-ac=\frac{b^2-4ac}{4}=\frac{\Delta}{4}$

Questa formula viene chiamata **formula risolutiva ridotta**.

Ovviamente, il numero delle soluzioni dell’equazione dipende dal segno di $\frac{\Delta}{4}$:

- $\frac{\Delta}{4}>0 \;\Rightarrow\;$ l’equazione ha due soluzioni reali e distinte;
- $\frac{\Delta}{4}=0 \;\Rightarrow\;$ l’equazione ha una soluzione reale (o due soluzioni reali e coincidenti);
- $\frac{\Delta}{4}<0 \;\Rightarrow\;$ l’equazione non ha soluzioni in $\boldsymbol{R}$.

Se b è pari e $a=1$, la formula ridotta diventa $x_{1/2}=$ ....

Esempio

Risolviamo l’equazione $3x^2-8x+5=0$.

I coefficienti di questa equazione sono: $a=3$, $b=-8$, $c=5$.

Poiché b è pari, si ha $\frac{b}{2}=\frac{-8}{2}=-4$; determiniamo $\frac{\Delta}{4}$:

$$\frac{\Delta}{4}=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac=\left(-4\right)^2-15=16-15=1\;\Rightarrow\;\frac{\Delta}{4}>0$$

L'equazione ha due soluzioni reali e distinte; applichiamo la **formula** risolutiva **ridotta**:

$$x_{1/2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a} \Rightarrow x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{1}}{3} = \frac{4 \pm 1}{3} = \begin{cases} x_1 = \frac{4-1}{3} = \frac{3}{3} = 1 \\ x_2 = \frac{4+1}{3} = \frac{5}{3} \end{cases}$$

Quindi, l'insieme soluzione è S = $\left\{1, \frac{5}{3}\right\}$.

Osservazione

Non sempre le equazioni di secondo grado sono scritte in forma normale, ovvero sono del tipo $ax^2 + bx + c = 0$; prima di applicare la formula risolutiva, allora, è necessario ridurre l'equazione a forma normale.

Esempio

Risolviamo l'equazione $(x+1)^2 = 41 - x$.

Prima di tutto **riduciamo** l'equazione **a forma normale**:

- innanzitutto calcoliamo il quadrato del binomio al primo termine:

$$x^2 + 2x + 1 = 41 - x$$

- *trasportiamo* i termini del secondo membro al primo membro:

$$x^2 + 2x + 1 - 41 + x = 0$$

- sommiamo i termini simili ed ordiniamo secondo le potenze decrescenti della variabile:

$$x^2 + 3x - 40 = 0$$

Adesso, possiamo risolvere l'equazione:

- calcoliamo il discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-40) = 9 + 160 = 169 \Rightarrow \Delta > 0;$$

- l'equazione ha due soluzioni reali e distinte;
- applichiamo la formula risolutiva:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{-3 \pm 13}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{-3-13}{2} = \frac{-16}{2} = -8 \\ x_2 = \frac{-3+13}{2} = \frac{10}{2} = 5 \end{cases}$$

Quindi, l'insieme soluzione è S = $\{-8, 5\}$.

PROVA TU

Dopo averle ridotte a forma normale, risolvi le seguenti equazioni:

a) $x^2 = -13 + 4x$; $\quad 2x - 1 = -15x^2$

b) $4\left(x^2 - x\right) = 8x - 9$; $\quad \dfrac{3x-5}{4} = -\dfrac{x-3}{5} + \dfrac{17+x^2}{20}$

16.3 Relazione tra i coefficienti di una equazione di secondo grado e le sue soluzioni

Completa la seguente tabella:

Equazione	a	b	c	Soluzioni	Somma soluzioni	Prodotto soluzioni	$\frac{b}{a}$	$\frac{c}{a}$
$s^2 - s - 6 = 0$	1	-1	-6	$s_1 = -2$; $s_2 = 3$	1	-6	-1	-6
$2h^2 - 3h + 1 = 0$								
	5	-3	0					
$x^2 + x - 2 = 0$								
$9t^2 - 4 = 0$								
	3	-4	1					

Osserva la colonna "Somma soluzioni" e quella in cui hai riportato il valore $\dfrac{b}{a}$:

➢ la **somma** delle soluzioni dell'equazione è …………………… all'opposto di ……………. .

Osserva la colonna "Prodotto soluzioni" e quella in cui hai riportato il valore di $\dfrac{c}{a}$:

➢ il **prodotto** delle soluzioni dell'equazione è …………………… a …………… .

Vediamo, adesso, se queste relazioni valgono in generale.

Consideriamo una equazione $ax^2 + bx + c = 0$ con $\Delta \geq 0$; le sue soluzioni sono:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{e} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Eseguiamo la loro somma che indichiamo con s:

$$s = x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac} - b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

$$= \text{(i due radicali si annullano perchè opposti)} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}.$$

In definitiva, si ha $\boxed{x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}}$

Eseguiamo il prodotto che indichiamo con p:

$$p = x_1 \cdot x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdot \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2}{4a^2} =$$

$$= \frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

In definitiva, si ha che $\boxed{\mathbf{x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}}}$

In sintesi:

data l'equazione $ax^2+bx+c=0$ ($\Delta \geq 0$), si hanno le seguenti relazioni:

- **somma delle soluzioni**: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
- **prodotto delle soluzioni**: $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Applicazioni

Vediamo, adesso, come possono essere applicate queste relazioni.

a) Consideriamo, ancora una volta, l'equazione $ax^2+bx+c=0$ ($\Delta \geq 0$) e indichiamo con s la somma delle sue soluzioni e con p il prodotto delle stesse soluzioni; quindi:

$$s = x_1 + x_2 \quad \text{e} \quad p = x_1 \cdot x_2$$

Applichiamo il secondo principio di equivalenza e dividiamo entrambi i membri per a ($\neq 0$, perché ………………..); otteniamo:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \qquad (*)$$

Per le relazioni precedenti si ha $\frac{b}{a} = -\left(x_1+x_2\right)$ e $\frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2$, sostituendo nell'equazione (*) otteniamo:

$$x^2 - \left(x_1+x_2\right)x + x_1 \cdot x_2 = 0 \qquad (**)$$

Poiché $s = x_1 + x_2$ e $p = x_1 \cdot x_2$, la (**) diventa:

$$x^2 - sx + p = 0 \qquad (***)$$

Possiamo, allora, affermare che in una equazione di secondo grado con discriminante non negativo e coefficiente a = 1, il **coefficiente** del termine di **primo grado** è **uguale** all'**opposto** della **somma** delle sue **soluzioni**, mentre il **termine noto** è uguale al **prodotto** delle **soluzioni** stesse.

b) Dato un **trinomio** di secondo grado ax^2+bx+c, si chiama **equazione** ad esso **associata** l'equazione che si ottiene **uguagliando** a **zero** il **trinomio stesso**.

Allora, se abbiamo il trinomio ax^2+bx+c, l'equazione ad esso associata è $ax^2+bx+c=0$.

Consideriamo, adesso, il trinomio ax^2+bx+c e siano x_1 e x_2 le soluzioni dell'equazione ad esso associata.

Operando il raccoglimento a fattor comune, abbiamo:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

Ricordando che $\frac{b}{a}=-\left(x_1+x_2\right)$ e $\frac{c}{a}=x_1\cdot x_2$, si ottiene:

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2-\left(x_1+x_2\right)x+x_1\cdot x_2\right)=a\left(x^2-x_1\cdot x-x_2\cdot x+x_1\cdot x_2\right)$$

Operando il raccoglimento parziale, scomponiamo il polinomio in fattori; si ottiene:

$$a\left(x^2-x_1\cdot x-x_2\cdot x+x_1\cdot x_2\right)=a\left(x\left(x-x_1\right)-x_2\left(x-x_1\right)\right)=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$$

In definitiva, si ha che:

$$\boxed{\boldsymbol{ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)}} \qquad (\ast)$$

In sintesi, per scomporre in fattori un trinomio di secondo grado dobbiamo:

- scrivere l'equazione ad esso associata;
- calcolare il suo discriminante:
  - se $\Delta \geq 0$, determinare le sue soluzioni;
    - scrivere il trinomio come prodotto di tre fattori applicando la relazione ($\ast$);
  - se $\Delta < 0$, il trinomio è irriducibile.

Queste osservazioni ci permettono di dare una risposta a quesiti di varo tipo; ad esempio:

- ✓ scrivere una equazione, ridotta a forma normale, della quale sono note le sue soluzioni;
- ✓ determinare due numeri conoscendo la loro somma ed il loro prodotto;
- ✓ scomporre in fattori, nell'insieme dei numeri reali, un trinomio di secondo grado;
- ✓ semplificare alcune frazioni algebriche.

Esempi

a) Determiniamo l'equazione, ridotta a forma normale, che ha come soluzioni i numeri -2 e 3.

Calcoliamo la somma s ed il prodotto p delle soluzioni:

$$s=-2+3=1; \qquad p=-2\cdot 3=-6$$

Sostituendo nell'equazione (***), otteniamo: $x^2-x-6=0$ che è l'equazione cercata.

b) Determiniamo l'equazione, ridotta a forma normale, che ha come soluzioni i numeri $-\frac{3}{2}$ e $\frac{3}{2}$.

Poiché le soluzioni sono opposte, l'equazione è *pura*.

La somma $s = x_1 + x_2 = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0$, il prodotto $p = x_1 \cdot x_2 = -\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = -\frac{9}{4}$.

Sostituendo nell'equazione (***), otteniamo:

$$x^2 - \frac{9}{4} = 0 \;\Rightarrow\; 4x^2 - 9 = 0$$

che è l'equazione cercata.

c) Determiniamo l'equazione, ridotta a forma normale, che ha come soluzioni i numeri $3\sqrt{2}$ e $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

La somma $s = x_1 + x_2 = 3\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$, il prodotto $p = x_1 \cdot x_2 = 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3$.

Sostituendo nell'equazione (***), otteniamo:

$$x^2 - \frac{7\sqrt{2}}{2}x + 3 = 0 \;\Rightarrow\; 2x^2 - 7\sqrt{2}x + 6 = 0$$

che è l'equazione cercata.

d) La somma di due numeri è $\frac{1}{3}$ ed il loro prodotto è $-\frac{2}{3}$. Quali sono i due numeri?

Sappiamo che $s = \frac{1}{3}$ e $p = -\frac{2}{3}$; sostituendo nell'equazione (***), otteniamo:

$$x^2 - \frac{1}{3}x + \left(-\frac{2}{3}\right) = 0$$

che, ridotta alla forma normale, diventa $3x^2 - x - 2 = 0$.

Risolviamo l'equazione:

- calcoliamo il discriminante: $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 1 + 24 = 25 \;\Rightarrow\; \Delta > 0$
- determiniamo le soluzioni:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \;\Rightarrow\; x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 3} = \frac{1 \pm 5}{6} = \begin{cases} x_1 = \frac{1-5}{6} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3} \\ x_2 = \frac{1+5}{6} = \frac{6}{6} = 1 \end{cases}$$

I numeri richiesti, quindi, sono $-\frac{2}{3}$ e 1.

e) Scomponiamo in fattori il trinomio $7x^2-6x-1$.

Scriviamo l'equazione associata: $7x^2-6x-1=0$;

- calcoliamo il discriminante: $\frac{\Delta}{4}=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac=(-3)^2-7\cdot(-1)=9+7=16 \Rightarrow \frac{\Delta}{4}>0$;
- determiniamo le sue soluzioni:

$$x_{1/2}=\frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a} \Rightarrow x_{1/2}=\frac{3\pm\sqrt{16}}{7}=\frac{3\pm 4}{7}=\begin{cases} x_1=\frac{3-4}{7}=-\frac{1}{7} \\ x_2=\frac{3+4}{7}=\frac{7}{7}=1 \end{cases}$$

Si ha $a=7$; $x_1=-\frac{1}{7}$; $x_2=1$; sostituendo nella relazione (✶), otteniamo:

$$7x^2-6x-1=7\left(x+\frac{1}{7}\right)(x-1) \Rightarrow (7x+1)(x-1)$$

f) Scomponiamo in fattori il trinomio $2x^2-\sqrt{2}x-2$.

Scriviamo l'equazione associata: $2x^2-\sqrt{2}x-2=0$;

- calcoliamo il discriminante: $\Delta=b^2-4ac=\left(-\sqrt{2}\right)^2-4\cdot 2\cdot(-2)=2+16=18 \Rightarrow \Delta>0$;
- determiniamo le sue soluzioni:

$$x_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_{1/2}=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{18}}{2\cdot 2}=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{3^2\cdot 2}}{4}=\frac{\sqrt{2}\pm 3\sqrt{2}}{4}=\begin{cases} x_1=\frac{\sqrt{2}-3\sqrt{2}}{4}=-\frac{2\sqrt{2}}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x_2=\frac{\sqrt{2}+3\sqrt{2}}{4}=\frac{4\sqrt{2}}{4}=\sqrt{2} \end{cases}$$

Si ha $a=2$; $x_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $x_2=\sqrt{2}$; sostituendo nella relazione (✶), otteniamo:

$$2x^2-\sqrt{2}x-2=2\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)=\left(2x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)$$

g) Scomponiamo in fattori il trinomio $4x^2-2x+1$.

Scriviamo l'equazione associata: $4x^2-2x+1=0$;

- calcoliamo il discriminante: $\frac{\Delta}{4}=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac=(-1)^2-4\cdot 1=1-4=-3 \Rightarrow \frac{\Delta}{4}<0$.

Il trinomio è irriducibile.

h) Semplifichiamo la frazione algebrica $\frac{x^2+\sqrt{3}x-6}{x^2+3\sqrt{3}x+6}$.

- Scomponiamo in fattori il numeratore $x^2+\sqrt{3}x-6$.

✓Scriviamo l'equazione associata $x^2+\sqrt{3}x-6=0$;

✓calcoliamo il discriminante: $\Delta = b^2 - 4ac = \left(\sqrt{3}\right)^2 - 4\cdot 1\cdot(-6) = 3 + 24 = 27 \;\Rightarrow\; \Delta > 0$;

✓determiniamo le soluzioni dell'equazione associata: $x_{1/2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{27}}{2\cdot 1} = \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{3^3}}{2} = \frac{-\sqrt{3} \pm 3\sqrt{3}}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-\sqrt{3} - 3\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{4\sqrt{3}}{2} = -2\sqrt{3} \\ x_2 = \dfrac{-\sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3} \end{cases}$$

Si ha $a = 1$; $x_1 = \sqrt{3}$; $x_2 = -2\sqrt{3}$; applicando la relazione (✶) si ottiene:

$$\boxed{x^2 + \sqrt{3}x - 6 = \left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + 2\sqrt{3}\right)}$$

- Scomponiamo in fattori il denominatore $x^2 + 3\sqrt{3}x + 6$.

✓Scriviamo l'equazione associata $x^2 + 3\sqrt{3}x + 6 = 0$;

✓calcoliamo il discriminante: $\Delta = b^2 - 4ac = \left(3\sqrt{3}\right)^2 - 4\cdot 1\cdot(+6) = 27 - 24 = 3 \;\Rightarrow\; \Delta > 0$;

✓determiniamo le soluzioni dell'equazione associata:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3\sqrt{3} \pm \sqrt{3}}{2\cdot 1} = \frac{-3\sqrt{3} \pm \sqrt{3}}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-3\sqrt{3} - \sqrt{3}}{2} = -\dfrac{4\sqrt{3}}{2} = -2\sqrt{3} \\ x_2 = \dfrac{-3\sqrt{3} + \sqrt{3}}{2} = -\dfrac{2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} \end{cases}$$

Si ha $a = 1$; $x_1 = -2\sqrt{3}$; $x_2 = -\sqrt{3}$; applicando la relazione (✶) si ottiene:

$$\boxed{x^2 + 3\sqrt{3}x + 6 = \left(x + 2\sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right)}$$

Riscriviamo la frazione sostituendo al numeratore e al denominatore la loro scomposizione in fattori; si ottiene:

$$\frac{x^2 + \sqrt{3}x - 6}{x^2 + 3\sqrt{3}x + 6} = \frac{\left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + 2\sqrt{3}\right)}{\left(x + 2\sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right)} = \frac{\left(x - \sqrt{3}\right)\overset{1}{\cancel{\left(x + 2\sqrt{3}\right)}}}{\underset{1}{\cancel{\left(x + 2\sqrt{3}\right)}}\left(x + \sqrt{3}\right)} = \frac{\left(x - \sqrt{3}\right)}{\left(x + \sqrt{3}\right)}$$

PROVA TU

1) Scrivi l'equazione di secondo grado, ridotta a forma normale, che ha come soluzioni:

a) i numeri $2\sqrt{3}$ e $\dfrac{4\sqrt{3}}{5}$; b) il numero -3; c) i numeri 0 e 5; d) i numeri -4 e 4.

2) Determina due numeri conoscendo la loro somma s ed il loro prodotto p:

a) $s = \dfrac{11}{6}$, $p = 6$; b) $s = 3$, $p = -3$; c) $s = \dfrac{4 + \sqrt{3}}{2}$, $p = \sqrt{3}$

3) Scomponi i seguenti trinomi di secondo grado:

a) $x^2 - 7x + 10$;   b) $4x^2 + 3x - 1$;   c) $x^2 + x - 6$;   d) $6x^2 - 5\sqrt{5} + 5$

4) Semplifica le seguenti frazioni algebriche:

a) $\dfrac{3x^2 + x - 2}{6x^2 + 5x - 6}$;   b) $\dfrac{2x^2 - 2\sqrt{2}x - 3}{2x^2 - 5\sqrt{2}x + 6}$

16.4 Equazioni parametriche di secondo grado

Si chiamano **equazioni parametriche** quelle equazioni in cui, oltre all'incognita, compare un'altra lettera chiamata "**parametro**"; per tali equazioni non si richiede di determinare l'insieme soluzione, ma di stabilire per quale valore del parametro esse soddisfano determinate condizioni.

Esempi

a) Determina per quali valori del parametro k le soluzioni dell'equazione $kx^2 - (k-3)x + 1 = 0$ sono reali e coincidenti.

Un' equazione di secondo grado ha due soluzioni reali e coincidenti soltanto se $\Delta = 0$.

In questa equazione si ha $a = k$; $b = -(k-3)$; $c = 1$

Calcoliamo il discriminante: $\Delta = b^2 - 4ac = [-(k-3)]^2 - 4k$.

Dovendo essere $\Delta = 0$, si ottiene $[-(k-3)]^2 - 4k = 0$.

Risolviamo l'equazione ottenuta:

$$[-(k-3)]^2 - 4k = 0 \Rightarrow k^2 - 6k + 9 - 4k = 0 \Rightarrow k^2 - 10k + 9 = 0 \Rightarrow S = \{1, 9\}$$

I valori di k che soddisfano la condizione richiesta sono: $k = 1$ e $k = 9$

b) Determina per quali valori del parametro h le soluzioni dell'equazione $4x^2 + (h-2)x + 1 = 0$ sono reali.

Un' equazione di secondo grado ha due soluzioni reali soltanto se $\Delta \geq 0$.

In questa equazione si ha $a = 4$; $b = (h-2)$; $c = 1$

Calcoliamo il discriminante: $\Delta = b^2 - 4ac = (h-2)^2 - 16$.

Dovendo essere $\Delta \geq 0$, si ottiene $(h-2)^2 - 16 \geq 0$.

Eseguendo le operazioni indicate, si ottiene:

$$(h-2)^2 - 16 \geq 0 \Rightarrow h^2 - 4h + 4 - 16 \geq 0 \Rightarrow h^2 - 4h - 12 \geq 0 \Rightarrow (h-6)(h+2) \geq 0$$

L'insieme soluzione di questa disequazione è $S = \left]-\infty, -2\right[\cup \left]6, +\infty\right[$.

La condizione richiesta è verificata da tutti i numeri h tali che $h \in \left]-\infty, -2\right] \cup \left[6, +\infty\right[$.

c) Determina per quale valore del parametro *m* l'equazione

$$3mx^2-(5+m)x+1+m=0$$

ha una soluzione nulla.

Un'equazione di secondo grado ha una soluzione nulla se è una equazione spuria; *il suo termine noto*, allora, *deve essere nullo*.

Imponiamo, perciò, $c = 0$; si ottiene:

$$1+m=0 \Rightarrow m=-1$$

Il valore di *m* che soddisfa la condizione richiesta è: $m=-1$.

d) Determinare il valore del parametro *l* affinché il numero 3 sia soluzione dell'equazione

$$x^2-(5l+1)x+9l=0.$$

Un numero è soluzione di un equazione se, sostituito alla variabile, rende vera l'uguaglianza.

Sostituendo il numero 3 alla variabile *x*, si ottiene:

$$9-(5l+1)\cdot 3+9l=0.$$

Dobbiamo, allora, determinare il valore di *l* per il quale è vera quest'ultima uguaglianza:

$$9-(5l+1)\cdot 3+9l=0 \;\Rightarrow\; 9-15l-3+9l=0 \;\Rightarrow\; -6l+6=0 \;\Rightarrow\; l=1$$

Il valore di *l* che soddisfa la condizione richiesta è: $l=1$.

e) Determina per quale valore del parametro *p*, la somma delle soluzioni dell'equazione

$$2x^2-(p+1)x+p=0$$

è uguale a 3.

Poichè $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, deve essere $-\frac{b}{a}=3$.

In questa equazione $a = 2$; $b=-(p+1)$.

Sostituendo i valori dei coefficienti otteniamo :

$$-\frac{b}{a}=-\frac{-(p+1)}{2} \;\Rightarrow\; \frac{p+1}{2}=3$$

Risolviamo l'equazione:

$$\frac{p+1}{2}=3 \;\Rightarrow\; p+1=6 \;\Rightarrow\; p=5$$

Il valore di *p* che soddisfa la condizione richiesta è $p=5$.

f) Determina per quale valore del parametro h il prodotto delle soluzioni dell'equazione:

$$(3h+2)x^2 - 5(h-3)x + 1 = 0$$

è uguale a $-\frac{8}{3}$.

Poichè $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, deve essere $\frac{c}{a} = -\frac{8}{3}$.

In questa equazione $a = 3h+2$; $c = 1$.

Sostituendo i valori dei coefficienti otteniamo :

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{3h+2} \Rightarrow \frac{1}{3h+2} = -\frac{8}{3}$$

Risolviamo l'equazione:

$$\frac{1}{3h+2} = -\frac{8}{3} \Rightarrow \text{ se } h \neq -\frac{2}{3},\ 3 = -8(3h+2) \Rightarrow 3 = -24h - 16 \Rightarrow 24h = -19 \Rightarrow h = -\frac{19}{24}$$

Il valore di h che soddisfa la condizione richiesta è $h = -\frac{19}{24}$.

g) Determina per quale valore del parametro k le soluzioni dell'equazione

$$4x^2 - (7k-5)x + 3k - 2 = 0$$

sono reciproche fra loro e scrivi l'equazione corrispondente.

Affermare che le soluzioni sono reciproche vuol dire che $x_1 = \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = 1 \Rightarrow \frac{c}{a} = 1$

In questa equazione $a = 4$; $c = 3k - 2$.

Sostituendo i valori dei coefficienti otteniamo :

$$\frac{c}{a} = \frac{3k-2}{4} \Rightarrow \frac{3k-2}{4} = 1$$

Risolviamo l'equazione:

$$\frac{3k-2}{4} = 1 \Rightarrow 3k - 2 = 4 \Rightarrow 3k = 6 \Rightarrow k = 2$$

Il valore di k che soddisfa la condizione richiesta è $k = 2$.

Per scrivere l'equazione corrispondente, sostituiamo al parametro k il valore 2:

$$4x^2 - (7\cdot 2 - 5)x + 3\cdot 2 - 2 = 0 \Rightarrow 4x^2 - 9x + 4 = 0.$$

h) Determina per quale valore del parametro t l'equazione :

$$(t-5)^2 x^2 + (2t-1)x - 3 = 0$$

ha due soluzioni opposte.

Una equazione di secondo grado ha due soluzioni opposte se è una equazione pura con coefficienti a e c discordi; dovrà, allora essere $b = 0$ e $a \cdot c < 0$.

In questa equazione $a = (t-5)^2$; $b = 2t - 1$; $c = -3$.

Deve essere, allora, $2t - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$.

Osserviamo, inoltre, che $a \cdot c = (t-5)^2 \cdot (-3) < 0$ per qualsiasi valore di $t \neq 5$ (**perché?**).

Il valore di t che soddisfa la condizione richiesta è $t = \frac{1}{2}$.

PROVA TU

Data l'equazione $kx^2 - 2kx + 6 - 2k = 0$, determina k in modo che:

a) una soluzione sia uguale a 1;

b) una soluzione sia nulla;

c) le soluzioni siano reali;

d) le soluzioni siano opposte.

16.5 Equazioni e problemi

Come già visto nel paragrafo 9.12, esistono nel campo matematico, in quello delle scienze applicate e nella realtà problemi il cui modello matematico è rappresentato da un'equazione.
In questo paragrafo affrontiamo problemi che hanno come modello matematico una equazione di secondo grado.
Per la costruzione del modello matematico del problema riprendiamo lo schema del paragrafo 9.12.

Cosa mi chiede il problema?	→	**1. Individuare la richiesta del problema**
Quale quantità posso indicare con ***x***?	→	**2. Scegliere l' incognita (richiesta)**
Quali valori può assumere ***x***?	→	**3. Porre condizioni accettabilità o dominio del problema**
Quali elementi dipendono da ***x***?	→	**4. Scrivere altri elementi in funzione di *x***
Quale relazione mi consente di trovare ***x***?	→	**5. Impostare equazione risolvente**
Determino il valore di ***x***	→	**6. Risolvere l'equazione**
Posso accettare il valore che ho trovato?	→	**7. Controllare accettabilità della soluzione**
Scrivo la risposta al problema	→	**8. Scrivere insieme soluzione o risposta**

Applichiamo lo schema precedente per individuare la soluzione di alcuni problemi.

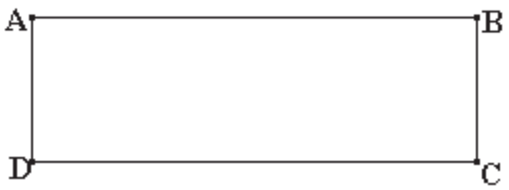
a) Determina un numero positivo tale che il suo quadrato aumentato del suo doppio sia uguale a 8**.**

1. Individuare la richiesta del problema	→	numero positivo
2. Assegnare incognita (richiesta)	→	$\boldsymbol{x}$ = numero positivo
3. Porre condizioni accettabilità	→	$\boldsymbol{x \in R^{+}}$
4. Scrivere altri elementi in funzione di *x*	→	$\boldsymbol{x^2}$ = quadrato di x $\boldsymbol{2x}$ = doppio di x
5. Impostare equazione risolvente	→	$\boldsymbol{x^2 + 2x = 8}$
6. Risolvere l'equazione	→	$x^2 + 2x = 8 \;\Rightarrow\; x^2 + 2x - 8 = 0$ $\frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = 1^2 - 1\cdot(-8) = 1 + 8 = 9 > 0$ $x_{1/2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{1} = -1 \pm 3 \;\Rightarrow$ $\Rightarrow\; x_1 = -4 \;\vee\; x_2 = 2$
7. Controllare accettabilità della soluzione	→	$\boldsymbol{-4 \notin R^{+}}$ $\Rightarrow$ soluzione non accettabile; $2 \in \boldsymbol{R}^{+}$ $\Rightarrow$ soluzione accettabile.
8. Scrivere insieme soluzione o risposta	→	**S** = $\{2\}$ oppure (Risposta) **Il numero richiesto è 2.**

b) In un rettangolo la misura di una dimensione supera il triplo della misura dell'altra di 8 cm. Sapendo che l'area del rettangolo misura 3 cm² , determina le misure dei lati del rettangolo.

Osservazione

In un problema di carattere geometrico, è opportuno costruire, oltre al modello matematico, anche il modello grafico del problema; quindi, è necessario disegnare la figura che soddisfa le condizioni poste dal problema.



$$\overline{AB} = 3\overline{AD} + 8$$

1. Individuare la richiesta del problema	→	misura dei lati
2. Assegnare incognita (richiesta)	→	$\boldsymbol{x}$ = misura di AD
3. Porre condizioni accettabilità	→	$\boldsymbol{x \in R^{+}}$
4. Scrivere altri elementi in funzione di *x*	→	$\boldsymbol{3x}$ = triplo di AD $\boldsymbol{3x+8}$ = misura di AB $\boldsymbol{x(3x+8)}$ = area di ABCD
5. Impostare equazione risolvente	→	$\boldsymbol{x(3x+8)=3}$
6. Risolvere l'equazione	→	$x(3x+8)=3 \Rightarrow 3x^2+8x-3=0$ $\frac{\Delta}{4}=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac=4^2-3\cdot(-3)=16+9=25>0$ $x_{1/2}=\frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a}=\frac{-4\pm\sqrt{25}}{3}=\frac{-4\pm5}{3} \Rightarrow$ $\Rightarrow x_1=-3, \quad x_2=\frac{1}{3}$
7. Controllare accettabilità della soluzione	→	$\boldsymbol{-3 \notin R^{+}} \Rightarrow$ soluzione non accettabile; $\boldsymbol{\frac{1}{3} \in R^{+}} \Rightarrow$ soluzione accettabile.
8. Scrivere la risposta	→	$\overline{AD}=\frac{1}{3}$ cm; $\overline{AB}=3\cdot\frac{1}{3}+8=9$ cm.

16.6 Equazioni di grado superiore al secondo

Qual è il grado delle seguenti equazioni?

a) $(2a+1)(a^2-2)=a+3$ $\Rightarrow$ (riduci a forma normale) ……………………… = 0,

grado …………

b) $(h^2-3)(h^2+2)=0$ $\Rightarrow$ grado …………

c) $(y^3-1)(y^2+1)=y^2+4$ $\Rightarrow$ (riduci a forma normale) ……………………… = 0,

grado …………

d) $(x-3)(y^2+1)(x+2)=0$ $\Rightarrow$ (riduci a forma normale) ……………………… = 0,

grado …………

Come sicuramente hai già notato, tutte le precedenti equazioni hanno grado maggiore di …… .

In questo e nei prossimi paragrafi ci occuperemo di particolari equazioni di grado superiore al secondo in una sola variabile.
Possiamo dare, allora, la seguente **definizione**:

- Un'**equazione** algebrica a coefficienti reali in una variabile si dice di grado **superiore al secondo** se, ridotta a forma normale, è del tipo $\mathbf{P}(x) = \mathbf{0}$**,** con $\mathbf{P}(x)$ polinomio di **grado** $n \geq 3$**.**

Ad esempio sono di grado superiore al secondo le seguenti equazioni:

$$x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = 0\,; \qquad x^4 - 1 = 0\,; \qquad x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$$

Risolvere, nell'insieme dei numeri reali, un'equazione di questo tipo vuol dire determinare tutte le sue soluzioni o radici reali e, quindi, determinare tutti gli *zeri reali* del polinomio $\mathrm{P}(x)$**.**

- Ricordiamo che si chiama **zero** di un **polinomio** il numero reale α per il quale risulta **P(**α**) = 0.**

Prima di illustrare i vari procedimenti per la risoluzione di equazioni di grado superiore al secondo, premettiamo il **Teorema fondamentale dell'Algebra** ed alcune sue conseguenze:

- Il **numero** delle **soluzioni** di un'**equazione** algebrica in una variabile è **uguale** al **grado** dell'**equazione** stessa.

Conseguenza:

- **Un'equazione algebrica di grado *n* a coefficienti reali ammette *al massimo n soluzioni reali.***

È possibile dimostrare che le soluzioni non reali di un'equazione algebrica sono sempre in numero pari (0, 2, 4 ,6,….), quindi:

- **un'equazione algebrica a coefficienti reali di grado dispari ha sempre *una soluzione reale*.**

La risoluzione di equazioni di grado superiore al secondo, ed in particolare la ricerca di formule risolutive per esse, ha rappresentato per molti secoli un vero problema per i matematici.
Due matematici italiani del Cinquecento, G. Cardano e Scipione del Ferro, riuscirono a determinare formule risolutive per le equazioni di terzo e di quarto grado, anche se la loro applicazione non è semplice.
All'inizio del 1800, precisamente nel 1824, il matematico norvegese N. Abel dimostrò che non esistono formule risolutive per le equazioni di grado superiore al quarto.

E' importante, comunque, sottolineare che questo non significa che non sia possibile risolvere equazioni di grado superiore al quarto, ma soltanto che non esiste una formula generale, come ad esempio per le equazioni di secondo grado e terzo grado, che mette in relazione le sue soluzioni dell'equazione con i suoi coefficienti reali.
Esaminiamo, comunque, alcune procedimenti che permettono di risolvere particolari equazioni di grado superiore al secondo.

16.7 Equazioni binomie

Osserva il polinomio al primo membro delle seguenti equazioni e **completa**:

a) $x^3 + 27 = 0$; **b)** $\frac{1}{16}b^4 - 1 = 0$; **c)** $4x^5 - 243 = 0$; **d)** $8x^6 + 1 = 0$

- ciascuno dei polinomi in esame è formato da …… termini e, quindi, esso è un …………….. ;
- in ciascuno dei polinomi in esame è presente il termine di grado ……. ;
- il grado di ciascuno dei polinomi in esame è maggiore di …….. ;
- il grado delle equazioni **a)** e **c)** è espresso da un numero ……………… ;
- il grado delle equazioni **b)** e **d)** è espresso da un numero ……………… .

Poiché il polinomio a primo membro è un binomio, queste equazioni sono chiamate **equazioni binomie**.

Risolviamo le equazioni precedenti.

a) $x^3 + 27 = 0 \;\Rightarrow\; x^3 = -27$.

Poiché l'esponente della potenza è un numero dispari, esiste un solo numero reale che rende vera l'uguaglianza, quindi:

$$x^3 + 27 = 0 \;\Rightarrow\; x^3 = -27 \;\Rightarrow\; x = \sqrt[3]{-27} \;\Rightarrow\; x = -3 \;\Rightarrow\; \mathrm{S} = \{-3\}.$$

b) $\frac{1}{4}b^4 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; b^4 - 4 = 0 \;\Rightarrow\; b^4 = 4$.

Poiché l'esponente della potenza è un numero pari esistono due numeri reali che, rendono vera l'uguaglianza, quindi:

$$\frac{1}{4}b^4 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; b^4 - 4 = 0 \;\Rightarrow\; b^4 = 4 \;\Rightarrow\; b = \pm\sqrt[4]{4} \;\Rightarrow\; b = \pm\sqrt[4]{2^2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; b = \pm\sqrt{2} \;\Rightarrow\; \mathrm{S} = \left\{\pm\sqrt{2}\right\}$$

c) $4x^5 - 243 = 0 \;\Rightarrow\; x^5 = \frac{243}{5}$.

Poiché l'esponente della potenza è un numero dispari, esiste un solo numero reale che rende vera l'uguaglianza, quindi:

$$4x^5 - 243 = 0 \;\Rightarrow\; x^5 = \frac{243}{5} \;\Rightarrow\; x = \sqrt[5]{\frac{243}{4}} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; x = \frac{3}{\sqrt[5]{4}} = (\text{razionalizzando}) = \frac{3}{5}\sqrt[5]{8} \;\Rightarrow\; \mathrm{S} = \left\{\frac{3}{5}\sqrt[5]{8}\right\}$$

d) $8x^6 + 1 = 0$.

Il binomio $8x^6 + 1$ esprime la somma fra un termine non negativo ed uno positivo; tale somma, pertanto, non potrà mai essere zero. L'equazione, quindi, non ha soluzioni.

In simboli: $8x^6 + 1 = 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{S} = \varnothing$

Analizzando i risultati ottenuti, notiamo che:

- l'insieme soluzione di entrambe le equazioni di grado dispari è diverso dall'insieme vuoto ed è formato da un solo numero reale;
- solo l'insieme soluzione di una delle due equazioni di grado pari è diverso dall'insieme vuoto ed esso è formato da due numeri reali opposti. In particolare, ha soluzioni l'equazione in cui i due termini sono discordi.

Le osservazioni appena fatte sono di carattere generale.

Si ha, quindi, la seguente **definizione**:

➢ Si chiama **binomia** un'equazione del tipo $\boldsymbol{ax^n + b = 0}$ con $n \in \boldsymbol{N}_0$ e $a \neq 0$.

Casi particolari:

- se n = 1, l'equazione binomia è un' equazione di primo grado;
- se n = 2, l'equazione binomia è un' equazione pura di secondo grado;
- se b = 0, l'equazione si riduce all'equazione monomia $ax^n = 0$ ed il suo insieme soluzione è $\mathrm{S} = \{0\}$.

Osservazione

Consideriamo l'equazione monomia $3x^5 = 0$.

Per definizione di potenza, possiamo scrivere $3x^5 = 0 \Rightarrow 3 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = 0$.

Ora, per la legge di annullamento del prodotto, sappiamo che il prodotto di più fattori è zero se almeno uno di essi è zero.

Si ottiene, allora:

$$x = 0 \ \vee \ x = 0 \ \vee \ x = 0 \ \vee \ x = 0 \ \vee \ x = 0$$

La soluzione "0" è stata ottenuta cinque volte; si dice, pertanto, che essa è una soluzione reale con molteplicità 5 oppure che essa ha cinque soluzioni reali coincidenti con la soluzione 0.

Consideriamo, quindi, l'equazione binomia $\boldsymbol{ax^n + b = 0}$ con $a \neq 0 \ \wedge \ b \neq 0$.

Per determinarne l'insieme soluzione, ricaviamo x^n; otteniamo: $x^n = -\dfrac{b}{a}$.

A questo punto, è necessario distinguere due casi:

- ***n* pari**
  - ➤ ***a*** e ***b*** **discordi**: l'equazione ammette **due radici reali opposte** $\boldsymbol{x = \pm\sqrt[n]{-\dfrac{b}{a}}}$, quindi

    $$\mathrm{S} = \left\{\pm\sqrt[n]{-\frac{b}{a}}\right\};$$
  - ➤ ***a*** e ***b*** **concordi**: l'equazione non ha soluzioni reali, quindi $\mathrm{S} = \varnothing$;

- ***n* dispari**

  l'equazione ammette una sola radice reale $\boldsymbol{x = \pm\sqrt[n]{-\frac{b}{a}}}$, quindi $S = \left\{\sqrt[n]{-\frac{b}{a}}\right\}$

Esempi

Risolviamo le seguenti equazioni binomie:

a) $2x^4 - 32 = 0$; **b)** $x^4 + 4 = 0$; **c)** $2x^3 - 54 = 0$; **d)** $x^7 + \frac{1}{128} = 0$

a) Il grado dell'equazione binomia è espresso da un numero pari (4).

Osserviamo che *a* e *b* sono discordi, pertanto l'equazione ha due soluzioni reali opposte.

Applicando il procedimento descritto in precedenza, si ottiene:

$$2x^4 - 32 = 0 \;\Rightarrow\; x^4 = 16 \;\Rightarrow\; x = \pm\sqrt[4]{16} \;\Rightarrow\; x = \pm 2 \;\Rightarrow\; S = \{\pm 2\}.$$

Osserviamo che saremmo arrivati allo stesso risultato scomponendo in fattori il polinomio al primo membro ed applicando la legge di annullamento del prodotto.

Infatti:

$$2x^4 - 32 = 0 \;\Rightarrow\; 2\left(x^2 - 4\right)\left(x^2 + 4\right) = 0 \;\Rightarrow\; x^2 - 4 = 0 \;\Rightarrow\; x = \pm 2 \;\Rightarrow\; S = \{\pm 2\}$$

b) Il grado dell'equazione binomia è espresso da un numero pari (4) e cui *a* e *b* sono concordi.

L'equazione non ha soluzione reali, quindi S = ∅.

c) Il grado dell'equazione binomia è espresso da un numero dispari (3); pertanto l'equazione ha una soluzione reale.

Si ottiene:

$$x^3 = 27 \;\Rightarrow\; x = \sqrt[3]{27} \;\Rightarrow\; x = 3 \;\Rightarrow\; S = \{3\}.$$

Osserviamo che saremmo arrivati allo stesso risultato scomponendo in fattori il polinomio al primo membro ed applicando la legge di annullamento del prodotto.

Infatti:

$$x^3 - 27 = 0 \;\Rightarrow\; \text{(differenza di due cubi)} \;\; (x-3)\left(x^2 + 3x + 9\right) = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; x - 3 = 0 \;\vee\; x^2 + 3x + 9 = 0 \;\Rightarrow\; x = 3$$

L'equazione di secondo grado $x^2 + 3x + 9 = 0$, avendo discriminante minore di zero non ha soluzioni reali.

d) Il grado dell'equazione binomia è espresso da un numero dispari (3); pertanto l'equazione ha una soluzione reale.

Infatti:

$$x^7 + \frac{1}{128} = 0 \;\Rightarrow\; x^7 = -\frac{1}{128} \;\Rightarrow\; x = \sqrt[7]{-\frac{1}{128}} \;\Rightarrow\; x = -\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

PROVA TU

1) Senza risolverle, riconosci quali delle seguenti equazioni binomie sono impossibili e quali ammettono una sola radice reale:

a) $2x^3 - 15 = 0$ **b)** $x^4 + 25 = 0$ **c)** $2x^6 - 10 = 0$ **d)** $x^5 - 243 = 0$ **e)** $2x^4 = 56$

2) Risolvi le seguenti equazioni binomie :

a) $3x^3 + 81 = 0$ **b)** $3x^3 + 81 = 0$ **c)** $3x^4 - 16 = 0$ **d)** $3x^4 + 16 = 0$

ESERCIZIO SVOLTO :

Risolviamo e discutiamo, al variare del parametro reale a, l'equazione binomia $ax^4 + 5 = 0$.

Distinguiamo due casi:

- $a = 0$

  l'equazione diventa $5 = 0$. Ovviamente è impossibile, quindi S = ∅;

- $a \neq 0$

  esplicitando x^4 si ottiene $x^4 = -\dfrac{5}{a}$;

  - se $a < 0$, l'espressione $-\dfrac{5}{a}$ è positiva; l'equazione ha due radici reali:

    $$x = \pm\sqrt[4]{-\frac{5}{a}} \Rightarrow S = \left\{\pm\sqrt[4]{-\frac{5}{a}}\right\};$$

  - se $a > 0$ l'espressione $-\dfrac{5}{a}$ risulta negativa; l'equazione non ha soluzioni reali:

    S = ∅.

PROVA TU

1) Data l'equazione binomia $(a+2)x^4 - 3 = 0$ completa in modo adeguato lo schema seguente :

se $a + 2 = 0 \Rightarrow a =$ ...., l'equazione diventa ……………… e risulta ……………….. ;

se $a \neq$ .... si ottiene $x^4 =$ .... da cui :

se $a + 2 > 0 \Rightarrow a >$ .... l'equazione ha …….. soluzioni reali: $x = \pm$...................... ;

se $a + 2 < 0 \Rightarrow a <$ .... l'equazione risulta ……………………….... .

2) Risolvi e discuti l'equazione binomia $x^4 + b - 2 = 0$ al variare del parametro $b \in R$.

16.8 Equazioni trinomie

Osserva il polinomio al primo membro delle seguenti equazioni e **completa**:

a) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$; **b)** $4y^4 + 3y^2 - 1 = 0$; **c)** $v^{10} - 31v^5 - 32 = 0$.

- ciascuno dei polinomi in esame è formato da …… termini; esso è un ………………….. ;
- in ciascuno dei polinomi in esame è presente il termine di grado ……. ;
- in ciascuno dei polinomi in esame l'esponente maggiore è il ………….. dell'esponente minore.

Equazioni di questo tipo sono chiamate **equazioni trinomie**.

Si ha, allora, la seguente **definizione**:

➢ Un'**equazione** si dice **trinomia** se è del tipo $\boldsymbol{ax^{2n}+bx^n+c=0}$, con $n \in N_0$ e a, b, c numeri reali non nulli.

Casi particolari

- $n=1$: l'equazione è un'equazione di secondo grado completa, già studiata precedentemente;
- $n=2$: l'equazione è un'equazione di quarto grado $ax^4+bx^2+c=0$, detta **biquadratica**.

Determinare l'insieme soluzione di equazioni di questo tipo non è molto difficile.

✓ Risolviamo l'equazione **a)**: $x^6-9x^3+8=0$.

Poniamo $x^3=t \Rightarrow x^6=\left(x^3\right)^2=t^2$; sostituendo nell'equazione, si ottiene $t^2-9t+8=0$.

Risolviamo l'equazione di secondo grado ottenuta:

Δ = ………… > 0; $t_{1/2}=$ ………………………………..

Sostituiamo a t i valori così determinati; si ottengono le equazioni:

- $x^3=1 \Rightarrow x=\sqrt[3]{1} \Rightarrow x=1 \Rightarrow S_1=\{1\}$
- $x^3=8 \Rightarrow x=\sqrt[3]{8} \Rightarrow x=2 \Rightarrow S_2=\{2\}$

L'insieme soluzione dell'equazione **a)** è, dunque, S = $S_1 \cup S_2=\{1,2\}$.

✓ Risolviamo l'equazione **b)**: $4y^4+3y^2-1=0$.

Questa equazione è un'equazione trinomia di quarto grado, quindi è un'equazione biquadratica.

Poniamo $y^2=a \Rightarrow y^4=\left(y^2\right)^2=a^2$; sostituendo nell'equazione, si ottiene $4a^2+3a-1=0$.

Risolviamo l'equazione di secondo grado ottenuta:

Δ = ………… > 0; $a_{1/2}=$ ………………………………..

Sostituiamo a t i valori così ottenuti; si ottengono le equazioni:

- $y^2=\frac{1}{4} \Rightarrow y=\pm\frac{1}{2} \Rightarrow S_1=\left\{\pm\frac{1}{2}\right\}$
- $y^2=-1 \Rightarrow S_2=\varnothing$

L'insieme soluzione dell'equazione **b)** è, dunque, S = $S_1 \cup S_2=\left\{\pm\frac{1}{2}\right\}$.

✓ Risolviamo l'equazione **c)**: $v^{10} - 31v^5 - 32 = 0$.

Ripetendo il procedimento seguito per le equazioni degli esempi a) e b), poniamo $v^5 = ... \Rightarrow v^{10} = (....)^2 = b^{..}$; sostituendo nell'equazione, si ottiene …………….……. .

Risolviamo l'equazione di secondo grado ottenuta:

Δ = ………… > 0; $b_{1/2}$ = ………………………………..

Sostituiamo a t i valori così ottenuti; si ottengono le equazioni:

- $v^5 = ... \Rightarrow v = \sqrt[5]{.....} \Rightarrow v = ... \Rightarrow S_1 = \{.....\}$
- $v^5 = ... \Rightarrow v = \sqrt[5]{.....} \Rightarrow v = ... \Rightarrow S_2 = \{.....\}$

L'insieme soluzione dell'equazione **c)** è, dunque, S = $S_1 \cup S_2 = \{........, ...\}$.

Sintetizziamo il procedimento che, in generale, permette di determinare le soluzioni reali dell'equazione trinomia $ax^{2n} + bx^n + c = 0$:

- si opera un *cambiamento* di variabile ponendo $x^n = y$ e, quindi, $x^{2n} = y^2$;
- l'equazione trinomia si riduce ad un'equazione di secondo grado: $ay^2 + by + c = 0$, detta equazione **risolvente** dell'equazione trinomia (*);
- si determinano le soluzioni y_1 e y_2 dell'equazione risolvente;
- si risolvono le equazioni binomie $x^n = y_1$ e $x^n = y_2$;
- detti S_1 e S_2 gli insiemi soluzioni delle equazioni binomie, l'insieme soluzione S dell'equazione trinomia è $S = S_1 \cup S_2$.

Esempi :

Risolviamo le seguenti equazioni trinomie:

a) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$; **b)** $x^8 + 17x^4 + 16 = 0$

a) Seguiamo lo schema illustrato in precedenza:

- operiamo il cambiamento di variabile: $x^4 = y$;
  - l'equazione $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$ si trasforma nell'equazione di secondo grado $y^2 - 17y + 16 = 0$;
- determiniamo le soluzioni dell'equazione risolvente: $y_1 = 1$ e $y_2 = 16$;
- risolviamo le equazioni binomie che si ottengono sostituendo ad y i valori ottenuti:

  $x^4 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow S_1 = \{\pm 1\}$,

  $x^4 = 16 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow S_2 = \{\pm 2\}$;
- L'insieme soluzione dell'equazione $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$ è $S = S_1 \cup S_2 \Rightarrow S = \{\pm 1, \pm 2\}$.

b) Seguiamo lo schema illustrato in precedenza:

- operiamo il cambiamento di variabile: $x^4 = y$;
  - l'equazione $x^8 + 17x^4 + 16 = 0$ si trasforma nell'equazione di secondo grado $y^2 + 17y + 16 = 0$;
- determiniamo le soluzioni dell'equazione risolvente: $y_1 = -1$ e $y_2 = -16$;
- risolviamo le equazioni binomie che si ottengono sostituendo ad y i valori ottenuti:

  $x^4 = -1 \quad \Rightarrow \quad S_1 = \varnothing$,

  $x^4 = -16 \quad \Rightarrow \quad S_2 = \varnothing$;
- L'insieme soluzione dell'equazione $x^8 + 17x^4 + 16 = 0$ è $S = S_1 \cup S_2 \Rightarrow S = \varnothing$.

ATTENZIONE

L'equazione $x^6 + 9x^2 + 8 = 0$ **non** è una **equazione trinomia** perché 6 non è il doppio di 2.

PROVA TU

1) Risolvi le seguenti equazioni trinomie :

a) $32x^6 - 12x^3 + 1 = 0$ $\left[S = \left\{ \frac{1}{2}; \frac{\sqrt[3]{2}}{2} \right\} \right]$

b) $x^8 - 3x^4 - 4 = 0$ $\left[S = \left\{ \pm\sqrt{2} \right\} \right]$

2) Data l'equazione $ax^6 + bx^3 + c = 0$ quale condizione deve essere verificata affinchè essa ammetta radici reali ? In tal caso quante sono le sue soluzioni reali ?

OSSERVAZIONE

Un'equazione biquadratica $ax^4 + bx^2 + c = 0$ è una particolare equazione trinomia che si riduce ad una equazione di secondo grado con la sostituzione di variabile $x^2 = y$.

Le sue soluzioni reali, se esistono, sono date dalle soluzioni delle due equazioni binomie di secondo grado $x^2 = y_1$ e $x^2 = y_2$, dove y_1 e y_2 sono le soluzioni reali dell'equazione risolvente di secondo grado.

Un'equazione biquadratica, essendo di quarto grado, può avere , al massimo, quattro soluzioni reali. Facendo un semplice ragionamento si può osservare che le soluzioni reali della biquadratica **saranno effettivamente quattro se l'equazione risolvente avrà discriminante maggiore di zero e se entrambe le sue radici sono positive.**

Quali condizioni devono verificare i coefficienti di un'equazione biquadratica affinchè essa abbia due sole soluzioni reali ? …………………………………………………………………………… .

E quali condizioni devono essere verificate affinchè essa non abbia alcuna soluzione reale ?

……………………………………………………………………………………………… .

PROVA TU

1) Risolvi le seguenti equazioni biquadratiche :

a) $4x^4 - 13x^2 + 3 = 0$; **b)** $x^4 - 2x^2 - 15 = 0$ $\left[S = \left\{\pm\frac{1}{2}, \pm\sqrt{3}\right\};\ S = \left\{\pm\sqrt{5}\right\}\right]$

c) $x^4 + 13x^2 + 36 = 0$; **d)** $3x^4 + 10x^2 + 9 = 0$ $[S = \varnothing;\ S = \varnothing]$

2) Senza risolverle, stabilisci il numero di soluzioni reali delle seguenti equazioni biquadratiche :

a) $2x^4 - 7x^2 + 3 = 0$; **b)** $2x^4 + 9x^2 - 5 = 0$; **c)** $4x^4 + 5x^2 + 1 = 0$

3) Scrivi un'equazione biquadratica avente per soluzioni i numeri $\pm\frac{1}{2}; \pm\frac{2}{3}$.

16.9 Equazioni risolubili con particolari sostituzioni

Ci proponiamo di risolvere l'equazione $\left(x^2 - 2\right)^2 - 5\left(x^2 - 2\right) + 6 = 0$.

Probabilmente, la prima cosa che ci viene in mente è quella di svolgere i calcoli indicati e ridurla a forma normale.

Così facendo, otteniamo un'equazione che presenta al primo membro un polinomio di quarto grado.

Ricorda, però, è sempre opportuno riflettere prima di agire!

La forma dell'equazione $\left(x^2 - 2\right)^2 - 5\left(x^2 - 2\right) + 6 = 0$ è simile a quella di un'equazione trinomia, il primo membro, infatti, è formato da tre termini e sono presenti due potenze i cui esponenti sono uno il doppio dell'altro.

La differenza è che la base delle potenze non è la variabile dell'equazione (x), ma una espressione che dipende da essa, cioè una funzione.

Per risolvere questa equazione, possiamo seguire lo schema indicato per la risoluzione delle equazioni trinomie:

- operiamo il cambiamento di variabile: $y = x^2 - 2$;
- l'equazione $\left(x^2 - 2\right)^2 - 5\left(x^2 - 2\right) + 6 = 0$ si trasforma nell'equazione di secondo grado $y^2 - 5y + 6 = 0$;
- determiniamo le soluzioni dell'equazione risolvente: $y_1 = 2$ e $y_2 = 3$;
- risolviamo le equazioni che si ottengono sostituendo ad y i valori ottenuti:

$x^2-2=2 \;\Rightarrow\; x^2=4 \;\Rightarrow\; x=\pm 2 \;\Rightarrow\; S_1=\{\pm 2\}$

$x^2-2=3 \;\Rightarrow\; x^2=5 \;\Rightarrow\; x=\pm\sqrt{5} \;\Rightarrow\; S_2=\{\pm\sqrt{5}\}$

- L'insieme soluzione dell'equazione $(x^2-2)^2-5(x^2-2)+6=0$ è:

$$S=S_1\cup S_2 \;\Rightarrow\; S=\{\pm 2, \pm\sqrt{5}\}.$$

Adesso generalizziamo.

Equazioni della forma

$$a\left(f(x)\right)^{2n}+b\left(f(x)\right)^n+c=0,$$

dove *f(x)* è un'espressione algebrica nella variabile *x*, come le equazioni trinomie, **possono essere ricondotte ad equazioni di secondo grado operando il cambiamento di variabile** $\left(f(x)\right)^n = y$.

Esempio

Risolviamo l'equazione $\left(\frac{x+2}{x}\right)^4+3\left(\frac{x+2}{x}\right)^2-28=0$.

Osserviamo che questa equazione è del tipo $a\left(f(x)\right)^{2n}+b\left(f(x)\right)^n+c=0$; infatti:

$$f(x)=\frac{x+2}{x}; \qquad n=2$$

Operiamo il cambiamento di variabile: $\left(\frac{x+2}{x}\right)^2=y$;

l'equazione $\left(\frac{x+2}{x}\right)^4+3\left(\frac{x+2}{x}\right)^2-28=0$ diventa $y^2+3y-28=0$;

determiniamo le soluzioni dell'equazione di secondo grado ottenuta: $y_1=-7$, $y_2=4$;

risolviamo le equazioni che si ottengono sostituendo ad *y* i valori ottenuti:

$$\left(\frac{x+2}{x}\right)^2=4 \;\Rightarrow\; \left(\frac{x+2}{x}\right)=\pm 2 \;\Rightarrow\; \frac{x+2}{x}=2 \;\vee\; \frac{x+2}{x}=-2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; x=2,\; x=-\frac{2}{3} \;\Rightarrow\; S_1=\left\{-\frac{2}{3},2\right\},$$

$$\left(\frac{x+2}{x}\right)^2=-7 \;\Rightarrow\; S_2=\varnothing$$

L'insieme soluzione dell'equazione $\left(\frac{x+2}{x}\right)^4+3\left(\frac{x+2}{x}\right)^2-28=0$ è:

$$S=S_1\cup S_2 \;\Rightarrow\; S=\left\{-\frac{2}{3},2\right\}.$$

PROVA TU

Mediante opportune sostituzioni, riconduci le seguenti equazioni ad equazioni di secondo grado e risolvile in ***R***:

a) $\left(x^2-1\right)^4-\left(x^2-1\right)^2-12=0$ $\left[S=\left\{\pm\sqrt{3}\right\}\right]$

b) $\left(x^2-1\right)^{10}-33\left(x^2-1\right)^5+32=0$ $\left[S=\left\{\pm\sqrt{2};\pm\sqrt{3}\right\}\right]$

16.10 Equazioni reciproche

Consideriamo le seguenti equazioni:

a) $3x^3+7x^2-7x-3=0$; **b)** $6b^4-5b^3-38b^2-5b+6=0$;

c) $12t^4+25t^3-25t-12=0$; **d)** $12p^5+8p^4-45p^3-45p^2+8p+12=0$.

Osserviamo che:

- tutte le equazioni sono ridotte a forma normale;
- il polinomio è ordinato secondo le potenze decrescenti della variabile.

Spostiamo, adesso, la nostra attenzione sui coefficienti dei termini del polinomio; notiamo che:

- nelle equazioni **a)** e **c)**
  - i coefficienti del primo ed ultimo termine sono opposti;
  - i coefficienti del secondo e penultimo termine sono opposti.
- nelle equazioni **b)** e **d)**
  - i coefficienti del primo ed ultimo termine sono uguali;
  - i coefficienti del secondo e penultimo termine sono uguali;
  - i coefficienti del terzo e terzultimo termine sono uguali (equazione **g)**).

Possiamo, allora, dire che in queste equazioni i termini **equidistanti** dagli **estremi** sono **uguali** oppure **opposti**.

- Risolviamo l'equazione a**)**: $3x^3+7x^2-7x-3=0$

  Osserviamo che la somma dei coefficienti del polinomio è zero, quindi esso è divisibile per $(x-1)$; scomponendo in fattori, allora, otteniamo:

  $$3x^3+7x^2-7x-3=0 \;\Rightarrow\; (x-1)\left(3x^2+10x+3\right)=0;$$

applichiamo la legge di annullamento del prodotto:

- $x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow S_1=\{1\}$
- $3x^2+10x+3=0 \Rightarrow x_1=-3,\ x_2=-\frac{1}{3} \Rightarrow S_2=\left\{-3,-\frac{1}{3}\right\}$

L'insieme soluzione del'equazione è $S=S_1\cup S_2=\left\{-3,-\frac{1}{3},1\right\}$.

➢ Risolviamo l'equazione **b)**: $6b^4-5b^3-38b^2-5b+6=0$

Applicando due volte il teorema del resto, otteniamo:

$$6b^4-5b^3-38b^2-5b+6=0 \;\Rightarrow\; (b+2)(6b^3-17b^2-4b+3)=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (b+2)(b-3)(6b^2+b-1)=0;$$

applichiamo la legge di annullamento del prodotto:

- $b+2=0 \Rightarrow b=-2 \Rightarrow S_1=\{-2\}$
- $b-3=0 \Rightarrow b=3 \Rightarrow S_2=\{3\}$
- $6b^2+b-1=0 \Rightarrow b_1=-\frac{1}{2},\; b_2=\frac{1}{3} \Rightarrow S_3=\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right\}$.

L'insieme soluzione dell'equazione è l'insieme S = $S_1\cup S_2\cup S_3=\left\{-2,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},3\right\}$.

La stessa equazione può essere risolta senza scomporre il polinomio in fattori.

Dividiamo, infatti, il polinomio per b^2 (divisione lecita, perché?); si ottiene:

$$6b^4-5b^3-38b^2-5b+6=0 \;\Rightarrow\; 6b^2-5b-38-\frac{5}{b}+\frac{6}{b^2}=0;$$

osserviamo che il primo e l'ultimo termine del polinomio hanno in comune il fattore 6, il secondo ed il penultimo termine hanno in comune il fattore 5; operiamo dunque il raccoglimento parziale:

$$6b^2-5b-38-\frac{5}{b}+\frac{6}{b^2}=0 \;\Rightarrow\; 6\left(b^2+\frac{1}{b^2}\right)-38-5\left(b+\frac{1}{b}\right)=0$$

Osserviamo che $b^2+\frac{1}{b^2}=\left(b+\frac{1}{b}\right)^2-2$; sostituendo nell'equazione precedente si ha:

$$6\left(b^2+\frac{1}{b^2}\right)-38-5\left(b+\frac{1}{b}\right)=0 \;\Rightarrow\; 6\left[\left(1+\frac{1}{b}\right)^2-2\right]-38-5\left(1+\frac{1}{b}\right)=0$$

Ponendo $b+\frac{1}{b}=h$, l'equazione diventa:

$$6(h^2-2)-38-5h=0$$

L'ultima equazione è un'equazione di secondo grado; dopo averla ridotta a forma normale, determiniamone l'insieme soluzione:

$$6h^2-12-38-5h=0 \;\Rightarrow\; 6h^2-5h-50=0 \;\Rightarrow\; h_1=-\frac{5}{2},\; h_2=\frac{10}{3}$$

Poiché $h=\left(b+\frac{1}{b}\right)$, otteniamo le seguenti equazioni:

- $b+\frac{1}{b}=-\frac{5}{2} \Rightarrow 2b^2+5b+2=0 \Rightarrow b_1=-2,\ b_2=-\frac{1}{2} \Rightarrow S_1=\left\{-2,-\frac{1}{2}\right\}$;
- $b+\frac{1}{b}=\frac{10}{3} \Rightarrow 3b^2-10b+3=0 \Rightarrow b_1=\frac{1}{3},\ b_2=3 \Rightarrow S_2=\left\{\frac{1}{3},3\right\}$

L'insieme soluzione dell'equazione è $S = S_1 \cup S_2 = \left\{-2,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},3\right\}$.

- Risolviamo l'equazione **c)**: $12t^4+25t^3-25t-12=0$.

  Osserviamo che la somma dei coefficienti dei termini del polinomio è zero, quindi il polinomio è divisibile per $t-1$; inoltre è facile verificare che -1 è una radice del polinomio, quindi esso è divisibile anche per $t+1$.

  Scomponendo in fattori l'equazione data, si ottiene:

  $$12t^4+25t^3-25t-12=0 \Rightarrow (t-1)(t+1)\left(12t^2+25t+12\right)=0;$$

  applichiamo la legge di annullamento del prodotto:

  - $t-1=0 \Rightarrow t=1 \Rightarrow S_1=\{1\}$;
  - $t+1=0 \Rightarrow t=-1 \Rightarrow S_2=\{-1\}$;
  - $12t^2+25t+12=0 \Rightarrow t_1=-\frac{4}{3},\ t_2=-\frac{3}{4} \Rightarrow S_3=\left\{-\frac{4}{3},-\frac{3}{4}\right\}$.

  L'insieme soluzione dell'equazione è $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left\{-\frac{4}{3},-1,-\frac{3}{4},1\right\}$

- Risolviamo l'equazione **g)**: $12p^5+8p^4-45p^3-45p^2+8p+12=0$.

  Verifica che, applicando più volte il teorema del resto e successivamente la legge di annullamento del prodotto, l'insieme soluzione dell'equazione è $S = \left\{-\frac{3}{2},-1,-\frac{2}{3},\frac{1}{2},2\right\}$.

Possiamo riepilogare i risultati ottenuti nella seguente tabella:

Equazione	Coefficienti dei termini equidistanti dagli estremi	Insieme soluzione
$3x^3+7x^2-7x-3=0$	opposti	$S=\left\{-3,-\frac{1}{3},1\right\}$
$6b^4-5b^3-38b^2-5b+6=0$	uguali	$S=\left\{-2,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},3\right\}$
$12t^4+25t^3-25t-12=0$	opposti	$S=\left\{-\frac{4}{3},-1,-\frac{3}{4},1\right\}$
$12p^5+8p^4-45p^3-45p^2+8p+12=0$	uguali	$S=\left\{-\frac{3}{2},-1,-\frac{2}{3},\frac{1}{2},2\right\}$

Osserviamo la colonna "Insieme soluzione": gli insiemi soluzione di ciascuna delle precedenti equazioni hanno qualcosa in comune?

- l'equazione $3x^3+7x^2-7x-3=0$ ha, fra le soluzioni, i numeri $\mathbf{-3}$ e $\mathbf{-\frac{1}{3}}$; questi due **numeri** sono **uno il reciproco dell'altro**;
- l'equazione $6b^4-5b^3-38b^2-5b+6=0$ ha, fra le soluzioni, i numeri $\mathbf{-2}$ e $\mathbf{-\frac{1}{2}}$ che sono **uno il reciproco dell'altro**, così come **3** e $\mathbf{\frac{1}{3}}$ che sono **uno il reciproco dell'altro**;
- l'equazione $12t^4+25t^3-25t-12=0$ ha, fra le soluzioni, i numeri $\mathbf{-\frac{4}{3}}$ e $\mathbf{-\frac{....}{....}}$ che sono **uno il ……………… dell'altro**;
- l'equazione $12p^5+8p^4-45p^3-45p^2+8p+12=0$ ha, fra le soluzioni, i numeri **2** e $\mathbf{\frac{1}{2}}$ che sono **uno il ……………… dell'altro**, così come $\mathbf{-\frac{3}{2}}$ e $\mathbf{-\frac{2}{....}}$ che sono **uno il ………………… dell'altro**.

Possiamo, allora, generalizzare (ed è possibile anche dimostrare):

Equazioni (ridotte a forma normale e ordinate secondo le potenze decrescenti della variabile di grado $n \geq 3$) nelle quali i **coefficienti** dei termini **estremi** e di quelli **equidistanti dagli estremi** sono **uguali** o **opposti**, se hanno come s**oluzione** un numero reale ***a***, allora hanno come **soluzione** anche il **suo reciproco** $\mathbf{\frac{1}{a}}$.

Per questo motivo, equazioni di questo tipo prendono il nome di **equazioni reciproche**.
Possiamo dare, allora, la seguente **definizione**.

- Si dice **reciproca** un'equazione del tipo $P(x)=0$ dove $P(x)$ è un polinomio ordinato secondo le potenze decrescenti o crescenti dell'a variabile *x* nel quale i coefficienti dei termini estremi e di quelli equidistanti dagli estremi sono uguali o opposti.

  Inoltre:

  - se i **coefficienti** dei **termini estremi** e di quelli **equidistanti dagli estremi** sono **uguali** l'equazione si dice di **prima specie**;
  - se i **coefficienti** dei **termini estremi** e di quelli **equidistanti dagli** estremi sono **opposti** l'equazione si dice di **seconda specie** .

Osservando ancora la tabella precedente, possiamo dedurre che:

- equazioni **reciproche** di **grado dispari** hanno, fra le **soluzioni**, il numero **1** se i coefficienti dei termini equidistanti dagli estremi sono **opposti** (equazioni reciproche di prima specie); hanno, fra le **soluzioni**, il numero $-\mathbf{1}$ se i coefficienti dei termini equidistanti dagli estremi sono **uguali** (equazioni reciproche di seconda specie);

- equazioni **reciproche** di **grado pari** hanno, fra le **soluzioni**, i numeri **1** e $-\mathbf{1}$ solo se i coefficienti dei termini equidistanti dagli estremi sono **opposti** (equazioni reciproche di seconda specie).

Le proprietà dedotte con le precedenti osservazioni sono generali.
Infatti, è possibile dimostrare, applicando il teorema del resto, al polinomio $P(x)$, che un'equazione reciproca:

- di grado dispari di prima specie ammette sempre come soluzione -1 ;
- di grado dispari di seconda specie ammette sempre come soluzione 1 ;
- di grado pari di seconda specie ammette sempre come soluzioni 1 e -1.

Osservazione
Le equazioni reciproche di terzo grado, oltre che con l'applicazione del Teorema del resto, possono essere *abbassate di grado* anche attraverso il raccoglimento parziale, come illustrato nell'esempio seguente.
Puoi scegliere, quindi, in quale modo abbassarle di grado; forse, in presenza di coefficienti irrazionali o letterali è preferibile applicare il Teorema del resto.

Esempio
Risolviamo l'equazione reciproca di terzo grado di prima specie, $x^3-4x^2-4x+1=0$.

Applicando la proprietà commutativa e associativa, possiamo scrivere:

$$x^3-4x^2-4x+1=0 \Rightarrow \left(x^3+1\right)-\left(4x^2+4x\right)=0;$$

Scomponendo in fattori $\left(x^3+1\right)$(somma di due cubi) e $\left(4x^2+4x\right)$, si ottiene:

$$\left(x^3+1\right)-\left(4x^2+4x\right)=0 \Rightarrow (x+1)\left(x^2-x+1\right)-4x(x+1)=0;$$

Possiamo, adesso, operare il raccoglimento a fattor comune, perché i due termini della somma algebrica hanno un fattore uguale ($x+1$); si ha, quindi:

$$(x+1)\left(x^2-x+1\right)-4x(x+1)=0 \Rightarrow (x+1)\left(x^2-x+1-4x\right)=0 \Rightarrow (x+1)\left(x^2-5x+1\right)=0$$

Applicando la legge di annullamento del prodotto, si ottengono le due equazioni:

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow S_1=\{-1\};$$

$$x^2-5x+1=0 \Rightarrow x_{1/2}=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2} \Rightarrow S_2=\left\{\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}\right\}$$

L'insieme soluzione dell'equazione data è $S=S_1\cup S_2 \Rightarrow S=\left\{1,\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}\right\}$.

Osserviamo che le soluzioni $x_1=\frac{5-\sqrt{21}}{2}$ e $x_2=\frac{5+\sqrt{21}}{2}$ sono effettivamente una la reciproca dell'altra in quanto il loro prodotto è $\frac{5-\sqrt{21}}{2}\cdot\frac{5+\sqrt{21}}{2}=1$.

PROVA TU

1) Stabilisci se le seguenti equazioni reciproche sono di prima o seconda specie :

a) $2x^3-9x^2+9x-2=0$ $\boxed{\text{I}}$ $\boxed{\text{II}}$

b) $3c^3-5c^2-5c+3=0$ $\boxed{\text{I}}$ $\boxed{\text{II}}$

c) $z^4-4z^3-3z^2-4z+1=0$ $\boxed{\text{I}}$ $\boxed{\text{II}}$

d) $2t^4-3t^3+3t-2=0$ $\boxed{\text{I}}$ $\boxed{\text{II}}$

e) $5m^5-3m^4-2m^3+2mx^2+3m-5=0$ $\boxed{\text{I}}$ $\boxed{\text{II}}$

2) Completa le seguenti equazioni in modo che risultino reciproche di prima specie:

a) $-2y^3+7y^2.............................=0;$

b) $.....b^4-5b^3.....................+7=0$

3) Completa le seguenti equazioni in modo che risultino reciproche di seconda specie:

a) $3s^5-s^4+.......-4s^2....................=0;$

b) $a^3-.........+2.....................=0$

4) Osservando che un'equazione reciproca di quarto grado seconda specie si può scrivere nella forma $ax^4+bx^3-bx-a=0$, dimostra che essa ha, sempre, $x=\pm1$ come soluzioni.

Riassumiamo, negli esempi seguenti, i procedimenti che consentono di risolvere equazioni reciproche di prima e seconda specie.

Esempi

✓ Risolviamo l'equazione $4x^3-13x^2-13x+4=0$.

Prima di tutto classifichiamo l'equazione.

Osservando i suoi coefficienti possiamo dire che è una equazione reciproca di terzo grado di prima specie. Quindi:

- essa ammette la soluzione $x = -1$;
- il polinomio a primo membro è divisibile per il binomio $x+1$ ed il quoziente è $4x^2 - 17x + 4$;
- l'equazione diventa $(x+1)(4x^2 - 17x + 4) = 0$;
- applicando la legge di annullamento del prodotto si ottiene:

  $x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow S_1 = \{-1\}$;

  $4x^2 - 17x + 4 = 0 \Rightarrow x = 4,\ x = \frac{1}{4} \Rightarrow S_2 = \left\{\frac{1}{4}, 4\right\}$;

- L'insieme soluzione dell'equazione $4x^3 - 13x^2 - 13x + 4 = 0$ è $S = S_1 \cup S_2 = \left\{-1, \frac{1}{4}, 4\right\}$.

✓ Risolviamo l'equazione $5x^3 - 31x^2 + 31x - 5 = 0$.

Classifichiamo l'equazione.

Completa

Osservando i suoi coefficienti possiamo dire che è una equazione reciproca di terzo grado di ……………. specie. Quindi:

- ammette la soluzione $x = 1$;
- il polinomio a primo membro è divisibile per il binomio …...... ed il quoziente è ……………………………………...;
- l'equazione diventa $(x-1)(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) = 0$;
- applicando la legge di annullamento del prodotto, si ottiene:
- $x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow S_1 = \{1\}$;
- ……………………….. $= 0 \Rightarrow x = 5,\ x = \ldots\ldots \Rightarrow S_2 = \{\ldots\ldots, 5\}$;
- L'insieme soluzione dell'equazione $5x^3 - 31x^2 + 31x - 5 = 0$ è $S = S_1 \ldots\ldots S_2 = \{1, \ldots\ldots, 5\}$.

✓ Risolviamo l'equazione $3x^4 - 4\sqrt{3}x^3 + 4\sqrt{3}x - 3 = 0$.

Classifichiamo l'equazione.

Osservando i suoi coefficienti possiamo dire che è una equazione reciproca di quarto grado di seconda specie. Quindi:

- ammette le due soluzioni $x = -1,\ x = 1$;
- il polinomio a primo membro è divisibile sia per il binomio $x+1$ che per il binomio $x-1$;
- scomponendo il fattori il polinomio a primo membro, l'equazione diventa $(x-1)(x+1)(3x^2 - 4\sqrt{3}x + 3) = 0$;

- applicando la legge di annullamento del prodotto, si ottiene:

  $x-1=0 \;\Rightarrow\; x=1 \;\Rightarrow\; S_1=\{1\}$;

  $x+1=0 \;\Rightarrow\; x=-1 \;\Rightarrow\; S_2=\{-1\}$;

  $3x^2-4\sqrt{3}x+3=0 \;\Rightarrow\; x=\sqrt{3},\; x=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \;\Rightarrow\; S_3=\left\{\sqrt{3},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right\}$

- L'insieme soluzione dell'equazione è l'insieme S = $S_1\cup S_2\cup S_3=\left\{-1,1,\dfrac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{3}\right\}$.

✓ Risolviamo l'equazione $12x^4+4x^3-41x^2+4x+12=0$.

Osservando i suoi coefficienti possiamo dire che essa è una equazione reciproca di quarto grado di prima specie.

È possibile determinarne le soluzioni scomponendo in fattori il polinomio al primo membro e applicando, successivamente, la legge di annullamento del prodotto.

Seguiremo, invece, un'altra strada:

- dividiamo tutti i termini per x^2, operazione lecita in quanto $x=0$ non è soluzione dell'equazione; si ottiene:

$$12x^4+4x^3-41x^2+4x+12=0 \;\Rightarrow\; 12x^2+4x-41+\frac{4}{x}+\frac{12}{x^2}=0$$

- operiamo un raccoglimento parziale: fra il primo ed ultimo termine raccogliamo a fattor comune il fattore 12, fra il secondo e il penultimo termine il fattore 4; si ha:

$$12x^2+4x-41+\frac{4}{x}+\frac{12}{x^2}=0 \;\Rightarrow\; 12\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+4\left(x+\frac{1}{x}\right)-41=0$$

- operiamo un cambiamento di variabile: $x+\dfrac{1}{x}=t \;\Rightarrow\; x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2-2$;

- l'equazione precedente diventa: $12\left(t^2-2\right)+4t-41=0 \;\Rightarrow\; 12t^2+4t-65=0$;

- risolvendo l'equazione di secondo grado, si ottiene $t=-\dfrac{5}{2},\; t=\dfrac{13}{6}$;

- sostituendo i valori di t così ottenuti, otteniamo le due equazioni:

  $x+\dfrac{1}{x}=-\dfrac{5}{2} \;\Rightarrow\; x=\dfrac{1}{2},\; x=2 \;\Rightarrow\; S_1=\left\{\dfrac{1}{2},2\right\}$

  $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{13}{6} \;\Rightarrow\; x=\dfrac{2}{3},\; x=\dfrac{3}{2} \;\Rightarrow\; S_2=\left\{\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{2}\right\}$

- L'insieme soluzione dell'equazione è l'insieme S = $S_1\cup S_2=\left\{\dfrac{1}{2},2,\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{2}\right\}$.

PROVA TU

1) Risolvi le seguenti equazioni reciproche:

a) $7x^3+43x^2-43x-7=0$ $\left[S=\left\{1,-7,-\frac{1}{7}\right\}\right]$

b) $15s^4-34s^3+34s-15=0$ $\left[S=\left\{-1,1\frac{5}{3},\frac{3}{5}\right\}\right]$

c) $8x^4-14x^3-69x^2-14x+8=0$ $\left[S=\left\{-2,-\frac{1}{2},\frac{1}{4},4\right\}\right]$

d) $3x^4-4\sqrt{3}x^3+4\sqrt{3}x-3=0$ $\left[S=\left\{-1,1,\sqrt{3},\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}\right]$

2) Risolvi la seguente equazione reciproca di quarto grado di prima specie senza applicare la legge di annullamento del prodotto:

$10x^4-49x^3+78x^2-49x+10=0$ $\left[S=\left\{1,\frac{2}{5},\frac{5}{2}\right\}\right]$

16.11 Equazioni riconducibili ad equazioni di primo e secondo grado mediante la scomposizione in fattori

Nei paragrafi precedenti abbiamo imparato a risolvere particolari equazioni di grado superiore al secondo.

In altri casi, la legge di annullamento del prodotto rappresenta uno strumento molto utile per la risoluzione di questo tipo di equazioni.

Infatti, equazioni che si presentano nella forma $P_1(x)\cdot P_2(x)\cdot \ldots\ldots \cdot P_n(x) = 0$, (dove $P_1(x)$, $P_2(x)$, ….., $P_n(x)$ sono polinomi di primo o secondo grado) si risolvono applicando la legge di annullamento del prodotto e, quindi, trovando i valori di x che annullano ogni singolo fattore.

✓ Ad esempio, consideriamo l'equazione $(3x-1)(x^2-3x)(x^2+4)=0$.

Per determinare le sue soluzioni è sufficiente applicare la legge di annullamento del prodotto ottenendo, così, equazioni di primo e secondo grado:

$$3x-1=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{1}{3} \;\Rightarrow\; S_1=\left\{\frac{1}{3}\right\};$$

$$x^2-3x=0 \;\Rightarrow\; x=0,\; x=3 \;\Rightarrow\; S_2=\{0,3\};$$

$$x^2+4=0 \;\Rightarrow\; S_3=\varnothing.$$

L'insieme soluzione dell'equazione $(3x-1)(x^2-3x)(x^2+4)=0$ è $S = S_1 \cup S_2=\left\{0,\frac{1}{3},3\right\}$.

✓ Risolviamo l’equazione $\left(x-1\right)^4(x^2+5)=0$.

Ancora una volta applichiamo la legge di annullamento del prodotto:

$\left(x-1\right)^4=0 \;\Rightarrow\; x-1=0$ (ripetuto 4 volte) $\Rightarrow x = 1$ (soluzione con molteplicità 4) $\Rightarrow\; S_1=\left\{1\right\}$;

$x^2+5=0 \;\Rightarrow\; S_2=\varnothing$.

L’insieme soluzione dell’equazione $\left(x-1\right)^4(x^2+5)=0$ è $S = S_1=\left\{1\right\}$.

Osserviamo che, per determinare l’insieme soluzione di queste equazioni, abbiamo risolto equazioni di primo e secondo grado; si dice, allora, che le equazioni sono state *abbassate di grado*.

Talvolta, (secondo esempio), le soluzioni di una equazione possono non essere distinte; se una soluzione è presente, ad esempio, *s* volte si dice che essa compare con **molteplicità *s***.

In generale, allora, **abbassare** di **grado** un’equazione algebrica vuol dire scriverla come **prodotto** di due o più **fattori**, ciascuno di essi di **grado inferiore** a quello dell’equazione data.

Esempi

✓ Risolviamo l’equazione $x^3-2x^2-3x+6=0$

Il polinomio x^3-2x^2-3x+6 è scomponibile in fattori:

operando il raccoglimento parziale si ottiene:

$x^3-2x^2-3x+6=x^2\cdot(x-2)-3\cdot(x-2)=(x-2)\cdot(x^2-3)$,

è possibile, allora, abbassare di grado l’equazione; si ha:

$x^3-2x^2-3x+6=0 \;\Rightarrow\; (x-2)\cdot(x^2-3)=0$;

applicando la legge di annullamento del prodotto, si ottengono le seguenti equazioni:

$x-2=0 \;\Rightarrow\; x=2 \;\Rightarrow\; S_1=\left\{2\right\}$;

$x^2-3=0 \;\Rightarrow\; x=-\sqrt{3},\;\; x=\sqrt{3} \;\Rightarrow\; S_2=\left\{\pm\sqrt{3}\right\}$

L’insieme soluzione dell’equazione $x^3-2x^2-3x+6=0$ è $S = S_1\cup S_2=\left\{\pm\sqrt{3},\; 2\right\}$.

✓ Risolviamo l’equazione $x^3-2x^2-5x+6=0$.

Per scomporre in fattori il polinomio $P\left(x\right)=x^3-2x^2-5x+6$ applichiamo il teorema del resto.

Osserviamo che $P\left(1\right)=0$, quindi $P\left(x\right)$ è divisibile per il binomio $(x-1)$.

Applicando la regola di Ruffini, si ottiene $x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x^2-x-6)$;

abbassiamo di grado l’equazione:

$x^3-2x^2-5x+6=0 \;\Rightarrow\; (x-1)(x^2-x-6)=0$

Applicando la legge di annullamento del prodotto, risolviamo le equazioni:

$x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow S_1=\{1\}$

$x^2-x-6=0 \Rightarrow x=-2, \;\; x=3 \Rightarrow S_2=\{-2,3\}$

L'insieme soluzione dell'equazione $x^3-2x^2-5x+6=0$ è $S = S_1 \cup S_2 = \{-2,1,3\}$.

PROVA TU

Dopo averle abbassate di grado, risolvi le seguenti equazioni:

a) $x^4-2x^2=0$ **b)** $x^3-2x^2-4x+8=0$ **c)** $x^3-2x^2-5x+6=0$

Osservazione

Ricordiamo due teoremi che forniscono un criterio per la individuazione di eventuali radici intere razionali di un'equazione a coefficienti interi o razionali.

Essi sono molto utili quando è necessario abbassare di grado una equazione.

Teorema 1

Le eventuali soluzioni **intere** di un'equazione algebrica del tipo $ax^n+bx^{n-1}+....+mx+p=0$, a coefficienti in ***Z***, sono da ricercare tra i divisori del termine noto p dell'equazione.

Teorema 2

Le eventuali soluzioni **razionali** di un'equazione algebrica del tipo $ax^n+bx^{n-1}+....+mx+p=0$, a coefficienti in ***Z***, sono da ricercare tra le frazioni irriducibili $\frac{r}{s}$ con *r* divisore del termine noto *p* e *s* divisore del primo coefficiente *a*.

Esempio

✓ Consideriamo l'equazione di terzo grado $2x^3-x^2+8x-4=0$.

Se essa ammette come soluzione una frazione ridotta ai minimi termini del tipo $\frac{r}{s}$, *r* sarà uno dei divisori del termine noto (4) e *s* sarà uno dei divisori del coefficiente del termine di grado massimo (2).

I divisori di 4 sono: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$; i divisori di 2 sono: $\pm 1, \pm 2$: i numeri razionali che possono essere soluzioni dell'equazione sono da ricercarsi fra i seguenti: $\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm 2, \pm 4$.

Poichè $P\left(\frac{1}{2}\right)=0$, possiamo dire che il numero razionale $\frac{1}{2}$ è soluzione dell'equazione.

Abbassando di grado l'equazione, determina, se esistono, le altre soluzioni reali dell'equazione data.

PROVA TU

1) Dopo averla abbassata di grado, risolvi l'equazione $x^3 + 6x^2 - x - 30 = 0$.

2) Risolvi, nell'insieme *R*, le seguenti equazioni:

a) $2(x^2+6)(-2x+1)=0$ **b)** $x\cdot(2x-3)=4\cdot(3-2x)$

c) $(x-1)^4\cdot(2x-3)^3=0$ **d)** $(x-1)^4+(x+2)^4=0$

e) $(x^2-x)^4+(x^2-1)^4=0$ **f)** $(x-4)^4-1=0$ (differenza di due quadrati)

g) $\dfrac{(x-3)^2-4}{x^2-1}=0$

ESERCIZIO SVOLTO

Scriviamo un'equazione di terzo grado avente come soluzioni $x=1$, $x=2$, $x=-3$.

Per quanto osservato in precedenza, le soluzioni di un'equazione del tipo $\mathrm{P}(x)=0$ sono anche zeri di $\mathrm{P}(x)$ e, pertanto, $\mathrm{P}(x)=(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x+3)$.

Una equazione che soddisfa le condizioni richieste è $(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x+3)=0$.

Riduciamo a forma normale: $(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x+3)=0 \Rightarrow x^3-7x+6=0$.

Tale equazione non è unica; infatti anche l'equazione $2\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x+3)=0$ verifica le condizioni poste.

PROVA TU

Determina un'equazione di terzo grado avente come soluzioni $x=\sqrt{2}$, $x=-\sqrt{2}$, $x=-1$.

Determina un'equazione di quarto grado avente come uniche soluzioni reali $x=\pm\sqrt{2}$.