CAPITOLO 1

IL LINGUAGGIO DEGLI INSIEMI

1.1 Gli insiemi e la loro rappresentazione

La *teoria ingenua degli insiemi*[1] considera gli **insiemi** come collezioni ben definite di oggetti, indipendentemente dalla natura degli elementi che li costituiscono. Gli oggetti che formano un insieme, chiamati **elementi** dell'insieme, devono essere, quindi, distinguibili tra loro e individuabili senza ambiguità.

Così le seguenti collezioni di oggetti:

- i pianeti del sistema solare;
- le capitali europee;
- i numeri naturali;
- 3, a, Arno, 127, Roma, Tirreno;

costituiscono ognuna un insieme dal punto di vista matematico; per loro è infatti vera una delle due possibilità:

- ➢ un dato oggetto **è** un elemento dell'insieme considerato,
- ➢ un dato oggetto **non è** un elemento dell'insieme considerato.

Invece, le collezioni di oggetti:

- le ragazze carine dell'ITIS "E. Majorana" di Brindisi nel corrente a.s.;
- i segmenti del piano non troppo lunghi;
- alcuni numeri naturali;

non costituiscono esempi di insiemi per la matematica: nel primo caso la scelta è soggettiva, dipendente dal gusto personale; nel secondo caso non sappiamo cosa significhi "non troppo lunghi" per cui l'insieme non è ben definito; nel terzo caso la parola "alcuni" dà la possibilità di costruire collezioni di numeri tra loro diverse e, quindi, non si è in grado di determinare quali elementi appartengono al nostro "aspirante insieme" e quali no.

Per indicare gli insiemi utilizzeremo le lettere maiuscole dell'alfabeto: *A, B, C, D, E,* ...... Seguiremo l'usuale convenzione di indicare con ***N*** l'insieme dei numeri naturali, con ***Z*** quello degli interi relativi, con ***Q*** quello dei razionali e con ***R*** quello dei reali.

Gli elementi di un insieme vengono indicati con le lettere minuscole dell'alfabeto: *a, b, c, d, e,* ....

---

[1] La *teoria ingenua (o intuitiva) degli insiemi* venne "creata", alla fine del XIX secolo, principalmente dal matematico, russo di origine ma tedesco per formazione, Georg Cantor che aveva riformulato la matematica in modo da fondarla solo sulla nozione di insieme. Nei primi anni del XX secolo, la Matematica fu scossa sin dalle fondamenta dalla scoperta di contraddizioni, dette paradossi o antinomie, soprattutto nella teoria degli insiemi per cui, per superare tali problemi, si ricorse all'assiomatizzazione della teoria degli insiemi, cioè ad assiomi che definivano gli insiemi e le operazioni che si potevano effettuare su di essi *(teoria assiomatica degli insiemi)*.

Per indicare che a **è** un elemento dell'insieme A si utilizza la notazione simbolica:

$a \in A$ (si legge "*a* **appartiene** ad *A*")

Il simbolo $\in$ è detto "simbolo di appartenenza".

Per indicare che a **non è** un elemento dell'insieme A si utilizza la notazione simbolica:

$a \notin A$ (si legge "*a* **non appartiene** ad *A*")

Il simbolo $\notin$ è detto "simbolo di non appartenenza".

Intuitivamente diremo che un insieme è *finito* se è possibile elencarne tutti gli elementi, in caso contrario si parla di insieme *infinito*.

Inoltre, due insiemi A e B sono detti *uguali*, e scriveremo $A = B$, se hanno gli stessi elementi.

Un insieme può essere rappresentato in tre modi diversi:

- ✓ **rappresentazione tabulare (o per estensione o per elencazione)**:

Secondo tale rappresentazione, gli elementi vengono scritti tutti all'interno di parentesi graffe, uno di seguito all'altro, separati da virgole o da punti e virgole.

Così, l'insieme A dei pianeti del sistema solare viene indicato nel seguente modo:

A = { Mercurio, Venere, Terra, Marte, Giove, Saturno, Urano, Nettuno, Plutone }

(leggi "A è l'insieme formato dagli elementi Mercurio, Venere, Terra, ……………………….....…"),
mentre l'insieme B, formato dagli elementi 0 , 1 , 2 , 3 , 4, viene indicato:

$$B = \{ 0 , 1 , 2 , 3 , 4 \}.$$

Osserviamo che riusciamo a rappresentare un insieme sotto forma tabulare soltanto se questo contiene un numero finito di elementi.

L'insieme N dei numeri naturali può, comunque, essere indicato:

$$\boldsymbol{N} = \{ 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , ….. \},$$

scrivendo, cioè, i "primi" elementi dell'insieme e, poi, aggiungendo i puntini di sospensione; analogamente, quando non si generano ambiguità, potremo procedere per altri insiemi.

Gli elementi di un insieme possono essere elencati in un ordine qualsiasi; così:

$$\{1, 2\} = \{2, 1\};$$

ed è, inoltre, irrilevante la ripetizione (*molteplicità*) degli elementi; cioè:

$$\{ 1, 2, 2\} = \{1, 1, 1, 2\}= \{1, 2\},$$

in quanto gli insiemi risultano uguali perché tutti formati dagli stessi elementi.

- ✓ **rappresentazione per proprietà caratteristica**:

Per indicare l'insieme X dei numeri naturali multipli di 3 possiamo scrivere:

X = { numeri naturali multipli di 3},

oppure, utilizzando i simboli del linguaggio matematico:

$$X = \{ x \,/\, x = 3 \cdot n \,,\ n \in \mathbf{N} \}$$

che si legge: “X è l’insieme degli x tali che $x = 3 \cdot n$, con n appartenente all’insieme dei numeri naturali”. In questo modo X è stato rappresentato per proprietà caratteristica.

La rappresentazione per proprietà caratteristica di un insieme consiste nell’individuarlo, in modo inequivocabile, attraverso la proprietà che caratterizza *tutti e soli* i suoi elementi.

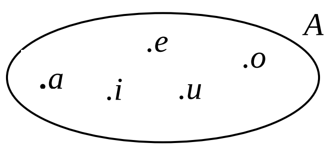
Questo metodo è utile, soprattutto, nel caso in cui l’insieme da rappresentare sia infinito o contenga un numero elevato di elementi.

- ✓ **rappresentazione grafica**:

Un insieme può essere rappresentato graficamente mediante i diagrammi di **Venn** (detti anche diagrammi di **Eulero – Venn**).

Per rappresentare un insieme con i diagrammi di Eulero – Venn si disegna una linea chiusa, al cui interno vengono posti gli elementi appartenenti all’insieme; all’esterno, eventuali *oggetti* che non vi appartengono.

Così, l’insieme A delle vocali dell’alfabeto italiano viene rappresentato come in figura:



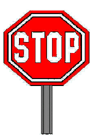
Consideriamo ora l’insieme

$$X = \{ x \in \mathbf{N} \,/\, x^2 = 2 \},$$

cioè l’insieme dei numeri naturali il cui quadrato è uguale a 2. Quali numeri appartengono ad X ? Nessuno; infatti:

$$0^2 = 0 \ ; \ 1^2 = 1 \ ; \ 2^2 = 4 \ ; \ 3^2 = 9 \ ; \ \ldots\ldots\ldots$$

Quindi X è un insieme che **non contiene alcun elemento**: è l’*insieme vuoto*, indicato con il simbolo Ø oppure con { }.



<u>ATTENZIONE</u>

$a \neq \{a\}$ in quanto “a” è un elemento di un dato insieme mentre $\{a\}$ è un insieme il cui unico elemento è a.

Così: $\{\varnothing\}$ non è la rappresentazione dell’insieme vuoto, ma quella dell’insieme il cui unico elemento è l’insieme vuoto.

Esempi

a) I numeri pari sono i multipli di 2 e i numeri dispari sono i successivi dei numeri pari; pertanto:

- la rappresentazione per caratteristica dell'insieme dei numeri pari è

$$P = \left\{ x \,/\, x = 2 \cdot n, \quad n \in \boldsymbol{N} \right\}$$

- la rappresentazione per caratteristica dell'insieme dei numeri dispari è

$$D = \left\{ x \,/\, x = 2 \cdot n + 1, \quad n \in \boldsymbol{N} \right\}.$$

b) Rappresentiamo in forma tabulare e grafica l'insieme

$$A = \left\{ x \in \boldsymbol{N} \,/\, x = 3k - 2, \quad k = 0, \; 1, \; 3, \; 5 \right\}.$$

Gli elementi dell'insieme A sono i numeri naturali ottenuti sostituendo alla lettera k, uno alla volta, i numeri 0, 1, 3, 5 così come indicato nell'insieme; pertanto:

– se $k = 0$: $x = 3 \cdot 0 - 2 = 0 - 2 = -2$; $-2 \notin \boldsymbol{N}$, quindi $-2 \notin A$;

– se $k = 1$: $x = 3 \cdot 1 - 2 = 3 - 2 = 1$; $1 \in \boldsymbol{N}$, quindi $1 \in A$;

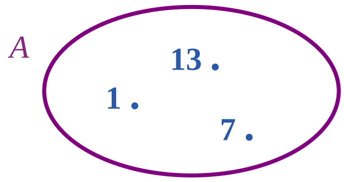
– se $k = 3$: $x = 3 \cdot 3 - 2 = 9 - 2 = 7$; $7 \in \boldsymbol{N}$, quindi $7 \in A$;

– se $k = 5$: $x = 3 \cdot 5 - 2 = 15 - 2 = 13$; $13 \in \boldsymbol{N}$, quindi $13 \in A$.

La rappresentazione tabulare di A è quindi:

$$A = \left\{ 1, \; 7, \; 13 \right\}$$

La rappresentazione grafica di A è la seguente:



♦ Rappresentiamo in forma tabulare e mediante i diagrammi di Eulero - Venn l'insieme

$$T = \left\{ x \in \boldsymbol{Z} \,/\, x = \frac{a-5}{2}, \;\; a \in N \;\; \text{ e } 1 < a \leq 5 \right\}.$$

Prima di tutto determiniamo i valori da assegnare alla lettera a.

La condizione "$1 < a \leq 5$, con $a \in \boldsymbol{N}$", indica che ad a devono essere assegnati i valori da 1 a 5, escluso 1 ed incluso 5; ad a si attribuiscono, allora, i valori 2, 3, 4, 5.

Gli elementi dell'insieme T sono, quindi, i numeri interi ottenuti sostituendo alla lettera a, uno alla volta, i numeri naturali appena determinati:

– se $a=2$, $x=\dfrac{2-5}{2}=-\dfrac{3}{2}$, ma $-\dfrac{3}{2}\notin \mathbf{Z}$, quindi $-\dfrac{3}{2}\notin T$

– se $a=3$, $x=\dfrac{3-5}{2}=-\dfrac{2}{2}=-1$, e $-1\in \mathbf{Z}$, quindi $-1\in T$

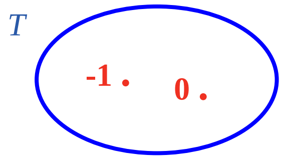
– se $a=4$, $x=\dfrac{4-5}{2}=-\dfrac{1}{2}$, ma $-\dfrac{1}{2}\notin \mathbf{Z}$, quindi $-\dfrac{1}{2}\notin T$

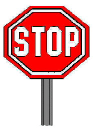
– se $a=5$, $x=\dfrac{5-5}{2}=\dfrac{0}{2}=0$ e $0\in \mathbf{Z}$, quindi $0\in T$

La rappresentazione tabulare di *T* è, dunque:

$$T=\left\{-1,\ \ 0\right\}$$

La rappresentazione grafica di *T* è la seguente:





ATTENZIONE

Sia $A=\left\{x\in \mathbf{N}\ /\ x=5k-2 \text{ e } -1\le k<6\right\}$.

L'insieme *A* non è "ben definito" perché non è stato indicato a quale insieme numerico appartiene *k*.

Non possiamo, quindi, rappresentare l'insieme *A*.

PROVA TU

1) Rappresenta in forma tabulare e mediante i diagrammi di Eulero - Venn i seguenti insiemi:

$$A=\left\{x\ /\ x \text{ è una vocale della parola "parco"}\right\}$$

$$B=\left\{x\in \mathbf{N}\ /\ x=\frac{2k+1}{3},\ \ k=1,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7\right\}$$

$$C=\left\{x\ /\ x\in \mathbf{N} \text{ e } x<9\right\}$$

$$D=\left\{x\in \mathbf{Z}\ /\ x=\frac{2m^2+1}{m-1},\ m\in Z \text{ e } -2\le m\le 3\right\}$$

2) Dati gli insiemi:

A = {3, 6, 9, 12} e B = {a, e, i, o, u},

rappresentali per proprietà caratteristica.

1.2 I sottoinsiemi

Definizione:

Si dice che un insieme A è un **sottoinsieme** di un insieme B se tutti gli elementi di A sono elementi di B e si scrive:

$A \subseteq B$ (leggi " A contenuto in B " o "A incluso in B " o, ancora, " A sottoinsieme di B "),

oppure

$B \supseteq A$ (leggi anche "B contiene A" o "B include A").

Un sottoinsieme A di B si dice **proprio** se esiste almeno un elemento di B che non appartiene ad A e scriveremo:

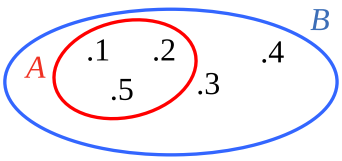
$A \subset B$ (leggi "A contenuto strettamente in B " o "A incluso strettamente in B " o, ancora, "A sottoinsieme proprio di B "),

oppure

$B \supset A$ (leggi anche "B include strettamente A").

Esempio

Dati gli insiemi $A = \{ 1 , 2 , 5 \}$ e $B = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 \}$, si ha che A è un sottoinsieme di B perché tutti gli elementi di A sono anche elementi di B, quindi $A \subseteq B$.



Poiché esiste almeno un elemento di B (3, 4) che non appartiene ad A, si ha che A è un sottoinsieme proprio di B, cioè $A \subset B$.

In base alla definizione data, si ha che ogni insieme A è sottoinsieme di se stesso perché tutti gli elementi di A appartengono ad A.

Possiamo quindi scrivere:

$$A \subseteq A .$$

Tra i sottoinsiemi di un insieme consideriamo anche l'insieme vuoto. Per la sua particolare caratteristica di non contenere elementi, si conviene di considerare l'insieme vuoto come sottoinsieme di un qualsiasi insieme.

Possiamo quindi scrivere:

$$\emptyset \subseteq A \text{, qualunque sia l'insieme } A.$$

In generale:

dato un insieme A , sono chiamati **sottoinsiemi impropri** (o **banali**) di A l'insieme A stesso e l'insieme vuoto.

Si può facilmente osservare che c'è una certa analogia tra i simboli $\subseteq$ e $\subset$ ed i simboli $\leq$ e $<$, così come tra i simboli $\supseteq$ e $\supset$ ed i simboli $\geq$ e $>$.

Il simbolo "$\not\subset$" significa "non è sottoinsieme"; per esempio, dati gli insiemi:

$$F = \{2,\ a,\ 5,\ 7,\ b\} \qquad \text{e} \qquad G = \{2,\ s,\ 5,\ b,\ 3\}$$

si ha che $F \not\subset G$ (F non è sottoinsieme di G) e che $G \not\subset F$ (G non è sottoinsieme di F) [*osserva gli elementi dei due insiemi*].

PROVA TU

Rappresenta con i diagrammi di Eulero – Venn gli insiemi

A = {x / x è un numero pari minore di 18} e B = {x / x è un multiplo di 4 minore di 20}

e stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false:

$A \supset B$	V	F	$A \subseteq B$	V	F
$B \subseteq A$	V	F	$B \subset A$	V	F

1.3 Insieme delle parti

Definizione

Dato un insieme A, si chiama **insieme delle parti** di A e si indica con $\mathcal{P}(A)$, l'insieme di tutti i sottoinsiemi, propri e impropri, di A.

Esempio

Dato l'insieme $A = \{\ a\ ,\ b\ ,\ c\ \}$, l'insieme delle parti di A è:

$$\mathcal{P}(A) = \{\{\ a\ \},\ \{\ b\ \},\ \{\ c\ \},\ \{\ a\ ,\ b\ \},\ \{\ a\ ,\ c\ \},\ \{\ b\ ,\ c\ \},\ \varnothing\ ,\ \{\ a\ ,\ b\ ,\ c\ \}\}.$$

Quanti sono gli elementi di $\mathcal{P}(A)$? Gli elementi di $\mathcal{P}(A)$ sono ______ .

PROVA TU

- Sia $B = \{a,\ e\}$; $\mathcal{P}(B)$ = ____
- Quanti elementi ha $\mathcal{P}(B)$? ____________
- Sia $C = \{2,\ m,\ 5\}$; $\mathcal{P}(C)$ = ____
- Quanti elementi ha $\mathcal{P}(C)$? __________
- Sia $D = \{3,\ 6,\ 9,\ 15\}$; $\mathcal{P}(D)$ = ____
- Quanti elementi ha $\mathcal{P}(D)$? _____________
- Esiste una relazione fra il numero degli elementi di un insieme A e il numero degli elementi di $\mathcal{P}(A)$? Se sì, qual è? ____

Si può dimostrare, cioè, che, se A contiene n elementi, $\mathcal{P}(A)$ contiene 2^{n} elementi.

1.4 Operazioni tra insiemi

1.4.1 Intersezione di insiemi

<u>**Definizione**</u>:

Dati due insiemi A e B, si dice **intersezione** dei due insiemi, e si indica con $\boldsymbol{A \cap B}$, l'insieme degli elementi che appartengono **sia ad *A* che a *B***. In simboli si ha:

$$A \cap B = \{\, x \,/\, x \in A \ \wedge \ x \in B \,\},$$

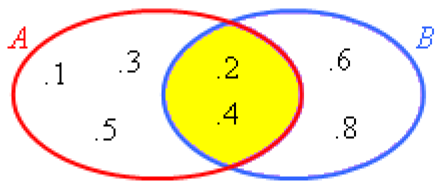
(leggi "A intersezione B è l'insieme degli x tali che $x \in A$ e $x \in B$"), dove abbiamo utilizzato il simbolo di *congiunzione logica* $\wedge$ (leggi "e") del quale parleremo in seguito.

Esempio

Dati gli insiemi $A = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 \}$ e $B = \{ 2 , 4 , 6 , 8 \}$, si ha:

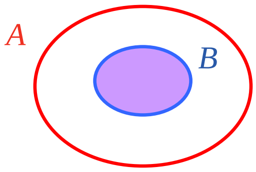
$$A \cap B = \{ 2 , 4 \}.$$

La parte in giallo rappresenta l'intersezione tra i due insiemi.



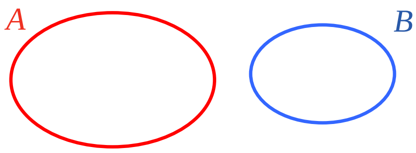
Osserviamo che:

- se $B \subseteq A$, allora $A \cap B = B$;



$A \cap B = B$

- se A e B non hanno elementi in comune, allora $A \cap B = \emptyset$. In tal caso i due insiemi A e B si dicono **disgiunti**.



$A \cap B = \emptyset$

1.4.2 Unione di insiemi

<u>**Definizione**</u>:

Dati due insiemi A e B, si dice **unione** dei due insiemi, e si indica con $\boldsymbol{A \cup B}$, l'insieme degli elementi che appartengono **ad almeno uno degli insiemi dati.** In simboli si ha:

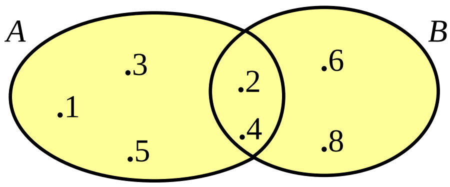
$$A \cup B = \{\, x \,/\, x \in A \ \vee \ x \in B \,\},$$

(leggi "A unione B è l'insieme degli x tali che $x \in A$ o $x \in B$"), dove abbiamo utilizzato il simbolo di *disgiunzione logica* (*inclusiva*) $\vee$ (leggi "o") del quale parleremo in seguito.

Esempio: Dati gli insiemi $A = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 \}$ e $B = \{ 2 , 4 , 6 , 8 \}$, si ha:

$$A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8\}.$$

La parte colorata rappresenta l'unione tra i due insiemi.



PROVA TU

a) Rappresenta graficamente gli insiemi $A = \{x \,/\, x$ *è una lettera della parola "calcio"* $\}$ e $B = \{x \,/\, x$ *è una lettera della parola "circo"* $\}$; successivamente colora di rosso l'insieme $C = A \cap B$ e di verde l'insieme $F = A \cup B$.

b) Verifica con esempi concreti o, astrattamente, mediante i diagrammi di Eulero – Venn, che per le operazioni di intersezione e unione valgono le seguenti proprietà:

PROPRIETÀ	***DEFINIZIONE***
Idempotenza	$A \cap A = A$ $A \cup A = A$
Commutativa	$A \cap B = B \cap A$ $A \cup B = B \cup A$
Associativa	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$
Distributiva dell'intersezione rispetto all'unione	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Distributiva dell'unione rispetto all'intersezione	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Partizione di un insieme

PROVA TU

Sia X = { Gaia, Anna, Cosimo, Lucia, Arturo, Luca, Ester, Gabriele, Sara, Laura, Aldo, Elena} e considera i sottoinsiemi di X formati dai nomi che hanno la stessa iniziale.

Completa:

A = {Anna, ____________, ______________}

C = { ______________ }

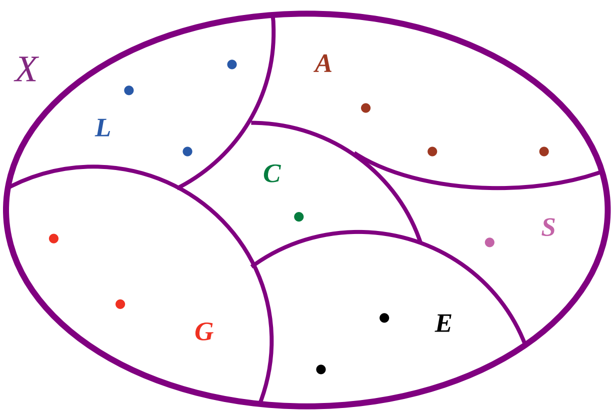
E = {Ester, ____________}

G = {Gaia, ____________ }

L = {Luca, ____________, ______________}

S = { ______________}

Riporta gli elementi dei sottoinsiemi nel diagramma di Eulero – Venn:



Osserva che:

- ogni sottoinsieme è diverso dall'insieme vuoto;
- i sottoinsiemi sono a due a due disgiunti;
- l'unione di tutti i sottoinsiemi è l'insieme *X*.

Si dice che l'insieme {*A*, *C*, *E*, *G*, *L*, *S*} costituisce una **partizione** dell'insieme *X*.

In generale, dato un insieme *Y*, si chiama **partizione di *Y*** l'insieme dei sottoinsiemi di *Y* tali che:

- ogni sottoinsieme è diverso dall'insieme vuoto;
- i sottoinsiemi sono a due a due disgiunti;
- l'unione di tutti i sottoinsiemi è l'insieme *Y*.

PROVA TU

Dato l'insieme *E* = { Milano, Torino, Napoli, Firenze, Mantova, Vercelli, Siena, Pisa }, determina una partizione dell'insieme *E*.

1.4.3 Differenza di insiemi

Definizione:

Dati due insiemi *A* e *B*, si dice **differenza** dei due insiemi, presi nell'ordine, e si indica con ***A* – *B***, l'insieme degli elementi che appartengono **ad *A* ma non a *B***. In simboli si ha:

$$A - B = \{ x / x \in A \wedge x \notin B \},$$

(leggi "*A* meno *B* è l'insieme degli *x* tali che $x \in A$ e $x \notin B$").

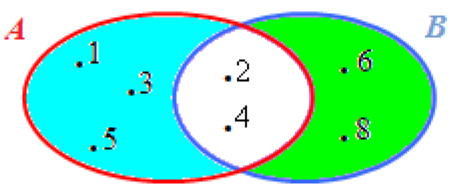
Esempio

Dati gli insiemi $A = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 \}$ e $B = \{ 2 , 4 , 6 , 8 \}$, si ha:

$A - B = \{ 1 , 3 , 5 \}$ (parte in azzurro della figura),

e

$B - A = \{ 6 , 8 \}$ (parte in verde della figura).

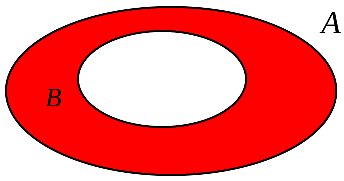


Quindi, per la differenza non vale la proprietà commutativa.

Osserviamo che:

- se $A \subseteq B$ allora $A - B = \varnothing$;
- se $A \cap B = \varnothing$ allora $A - B = A$ e $B - A = B$.

Se *B* è un sottoinsieme di un insieme *A*, l'insieme differenza *A* – *B* viene anche chiamato **complementare di *B* rispetto ad *A*** ed indicato con il simbolo $\mathbf{C}_A(B)$ o $\overline{B}_A$ (parte in rosso della figura).



PROVA TU

- Dopo aver rappresentato graficamente gli insiemi:
$$E=\left\{x\,/\ \ -7<x<4,\ \ x\in \boldsymbol{Z}\right\}\qquad \text{e}\qquad F=\left\{x\,/\ \ 2\le x<9,\ \ x\in \boldsymbol{N}\right\},$$
colora di azzurro l'insieme $E-F$ e di giallo l'insieme $F-E$.

- Dopo aver verificato che l'insieme $C=\left\{x\in \boldsymbol{Z}\,/\,x=(m-3)^2-3,\ m\in \boldsymbol{Z}\wedge -2<m<3\right\}$ è un sottoinsieme di $D=\left\{-5,\ -3,\ -2,\ 0,\ 1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 13,\ 20,\ 22,\ 29,\ 33\right\}$, determina l'insieme $\overline{C}_D$.

1.4.4 Prodotto cartesiano di insiemi

Definizione:

Dati due insiemi A e B, si dice **prodotto cartesiano** dei due insiemi, presi nell'ordine, e si indica con $\boldsymbol{A\times B}$, l'insieme di tutte le **coppie ordinate** (x, y), in cui il primo elemento x appartiene ad A e il secondo elemento y appartiene a B.

In simboli:

$$A\times B=\{(x\,,y)\,/\,x\in A\wedge y\in B\}$$

(leggi "il prodotto cartesiano di A per B è l'insieme delle coppie ordinate $(x\,,y)$ tali che $x\in A$ e $y\in B$").

Se $A = B$, il prodotto cartesiano si indica $A\times A$ o A^2.

Esempio

Dati gli insiemi $A = \{\,a\,,b\,,c\}$ e $B = \{\,1\,,2\,\}$ si ha:

$$A\times B=\{(a\,,1)\,,(a\,,2),(b\,,1)\,,(b\,,2)\,,(c\,,1)\,,(c\,,2)\}.$$
$$B\times A=\{(1\,,a)\,,(1\,,b)\,,(1\,,c)\,,(2\,,a\,)\,,(2\,,b)\,,(2,c)\}.$$

Si può facilmente osservare che $A\times B\neq B\times A$, cioè il prodotto cartesiano di due insiemi, non vuoti e distinti, **non** gode della proprietà commutativa.

Osserviamo, inoltre, che l'insieme A ha 3 elementi, l'insieme B ha 2 elementi e l'insieme $A\times B$ ha 6 (= 3 · 2) elementi.

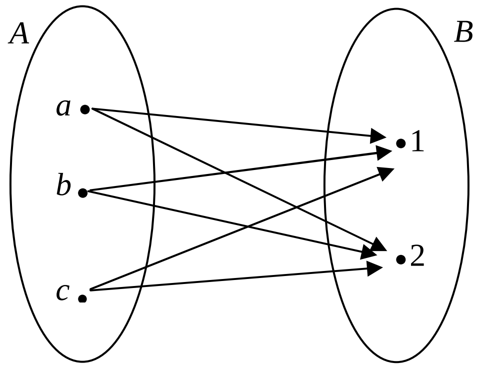
Questa è una proprietà generale:

se un insieme *A* è formato da *m* elementi e un insieme *B* è formato da *p* elementi, l'insieme *A*× *B* è formato da *m* · *p* elementi.

Oltre che elencandone le coppie, il prodotto cartesiano ha alcune interessanti forme di rappresentazione grafica:

- ✓ **rappresentazione sagittale** (o **a frecce**)

Dopo aver disegnato gli insiemi A e B con i diagrammi di Eulero – Venn, si unisce con un segmento orientato (**freccia**) ogni elemento del primo insieme con ciascun elemento del secondo insieme, individuando in questo modo tutte le coppie ordinate.



Quindi: $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$

Questo metodo è consigliabile solo se gli insiemi hanno un piccolo numero di elementi, perché altrimenti diventa di difficile lettura.

- ✓ **rappresentazione matriciale** (o con **tabella a doppia entrata**)

Costruiamo una tabella ai cui lati sono posti gli elementi degli insiemi A e B (nella colonna gli elementi di A e nella riga gli elementi di B); ogni coppia ordinata si trova nella casella incrocio della riga e della colonna corrispondenti.

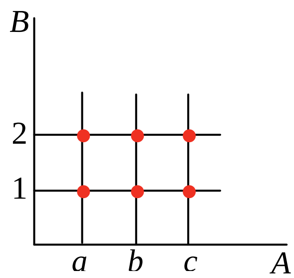
Per esempio, la coppia **(*b*;2)** deve essere posta all'incrocio tra la riga b e la colonna 2.

A \ B	1	2
a	(a;1)	(a;2)
b	(b;1)	**(b;2)**
c	(c;1)	(c;2)

- ✓ **rappresentazione cartesiana** (o **reticolo**)

Si disegnano due semirette tra loro perpendicolari aventi la stessa origine: si indicano sulla semiretta "orizzontale" gli elementi dell'insieme A e sulla semiretta "verticale" gli elementi dell'insieme B.

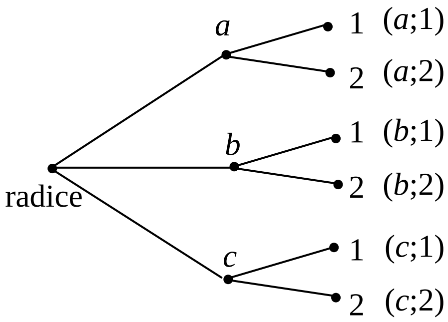
Conducendo le rette che formano la quadrettatura, si rappresentano simbolicamente le coppie con i punti d'intersezione delle rette verticali con quelle orizzontali (**nodi**).



- ✓ **rappresentazione ad albero**

In questo tipo di grafico si parte da un nodo iniziale, detto **radice**, e si tracciano tanti segmenti, chiamati **rami**, per quanti sono gli elementi del primo insieme, ognuno dei quali termina in un nodo a sua volta ramificato, con tanti rami quanti sono gli elementi del secondo insieme (da qui la **struttura ad albero**).

Percorrendo le ramificazioni, dalla radice al nodo finale, si ottengono tutti gli elementi del prodotto cartesiano.



PROVA TU

1) Dati gli insiemi $A = \{1, 4, 5\}$ e $B = \{3, f, 4, s\}$, rappresenta in tutti i modi possibili $A \times B$.
2) Dati gli insiemi $A = \{t, s, m\}$, $B = \{5, 9\}$, $C = \{a, i, u\}$, verifica che:
   - $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
   - $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

OSSERVAZIONE

Tenendo conto dei risultati dell'esercizio 2), possiamo affermare che, per il prodotto cartesiano fra due insiemi, valgono le seguenti proprietà:

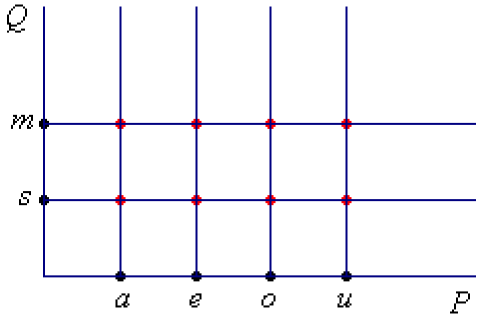
- **proprietà distributiva del prodotto cartesiano rispetto all'operazione di unione;**
- **proprietà distributiva del prodotto cartesiano rispetto all'operazione di intersezione.**

Esempi:

- Sia $A \times B = \{(-3, 7), (7, 7), (-3, 1), (7, 4), (-3, 4), (7,1)\}$; determiniamo gli insiemi A e B.

Ricordando la definizione di prodotto cartesiano di due insiemi, osserviamo che gli elementi di A sono quegli elementi che occupano il primo posto all'interno di ciascuna coppia ordinata e gli elementi di B sono quegli elementi che occupano il secondo posto sempre all'interno di ciascuna coppia ordinata. Si ha, dunque, $A = \{-3, 7\}$ e $B = \{7, 1, 4\}$.

- Nella seguente figura è rappresentato $P \times Q$ o $Q \times P$?



Poiché sulla semiretta orizzontale è rappresentato l'insieme P e su quella verticale l'insieme Q, nella figura è rappresentato l'insieme $P \times Q$.

PROVA TU

a) Rappresenta $Q \times P$ con la rappresentazione ad albero, con la rappresentazione sagittale e con la rappresentazione matriciale, essendo P e Q gli insiemi dell'esercizio precedente.

b) Siano $A = \left\{ x \in \boldsymbol{Q} \,/\, x = \dfrac{2m-1}{m+2},\ \ m = -\dfrac{1}{2},\ \ 0,\ \ \dfrac{2}{3} \right\}$ e $B = \left\{ x \in \boldsymbol{N} \,/\, x = 3n,\ \ n \in \boldsymbol{N} \wedge x \le 7 \right\}$ due insiemi. Dopo averli espressi in forma tabulare, rappresenta in tutti i modi possibili $A \times B$.

1.5 ESERCIZI DI RIEPILOGO

1) Rappresenta graficamente gli insiemi $A = \left\{ x \in \boldsymbol{Z} \,/\, x = \dfrac{2m^2-3}{3m+1},\ \ m = -2,\ -1,\ -\dfrac{1}{2},\ 0,\ \dfrac{1}{2},\ 1,\ 2 \right\}$ e $B = \left\{ x \,/\, x = 3 \cdot k - 7,\ \ k \in \boldsymbol{N} \text{ e } 1 \le k < 6 \right\}$.

Colora di rosso $A \cap B$, colora di verde $A \cup B$, colora di giallo $A - B$, colora di azzurro $B - A$.

Rappresenta in forma tabulare $\mathcal{P}(A)$.

Stabilisci, inoltre, se le seguenti affermazioni sono vere o false:

$A \subseteq B$	V	F	$\{-1\} \in A$	V	F
$B \supset \{-4,\ 5\}$	V	F	$2 \subset B$	V	F
$B \supset A$	V	F	$\varnothing \subset A$	V	F
$0 \in A$	V	F	$B \not\subset A$	V	F
$\{-1\} \in \mathcal{P}(A)$	V	F	$5 \in A \cap B$	V	F
$\varnothing \subseteq B$	V	F	$\{-1,\ 5,\ -3\} \subset A$	V	F
$5 \in B$	V	F	$A \cap B = \varnothing$	V	F

2) Completa inserendo gli elementi mancanti in modo che le seguenti uguaglianze siano vere:

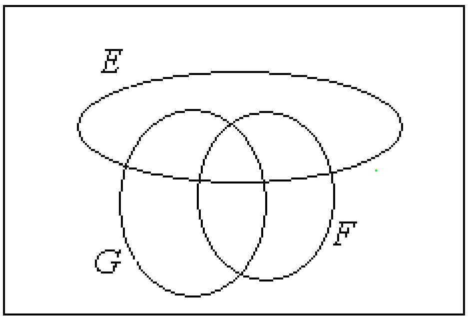
a) $\{-3,\ \ldots\ldots,\ 5,\ \ldots\ldots\} \cap \{-9,\ \ldots\ldots,\ 2\} = \{\ 2,\ -5\}$

b) $\{f,\ s,\ p\} \cup \{f,\ \ldots\ldots,\ \ldots\ldots\} = \{f,\ a,\ p,\ s,\ t\}$

c) $\{u,\ \ldots\ldots,\ \ldots\ldots\} \times \{-1,\ \ldots\ldots\} = \{(\ldots\ldots,\ 8),\ (a,\ -1),\ (i,\ 8),\ (i,\ \ldots\ldots),\ (\ldots\ldots,\ \ldots\ldots),\ (\ldots\ldots,\ \ldots\ldots)\}$

3) Inserisci negli insiemi *E*, *F*, *G* gli elementi *a*, *d*, *m*, *p*, *s*, *t* in modo tale che siano vere le seguenti affermazioni:

- $E \cup F = \{a,\ p,\ s,\ m,\ t\}$
- $E \cup G = \{a,\ p,\ d,\ m,\ t\}$
- $F \cap E = \{p,\ t\}$
- $G \cap E = \{m,\ t\}$
- $F \cap E \cap G = \{t\}$



4) Per ciascuna delle seguenti figure, colora l'insieme indicato:

– nella fig. a, l'insieme $(A - B) \cup (B \cap C)$;
– nella fig. b, l'insieme $(A \cap C) \cup (A - B)$.

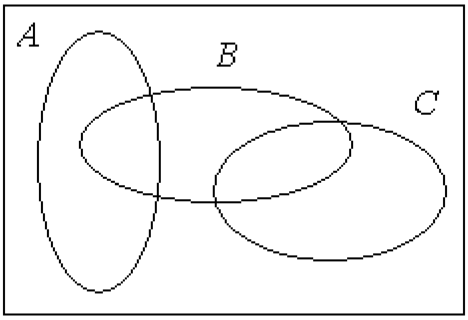


fig. a

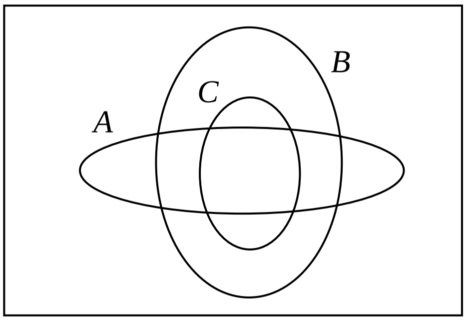


fig. b

5) Per ciascuna delle seguenti figure, determina un'espressione con le operazioni fra insiemi che rappresenti la parte colorata:

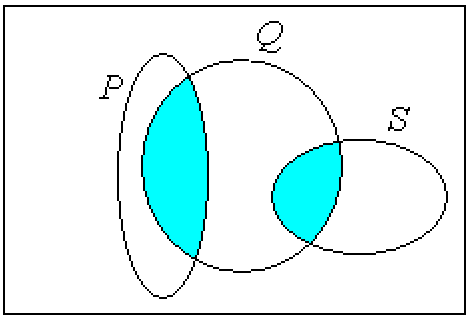


fig.a

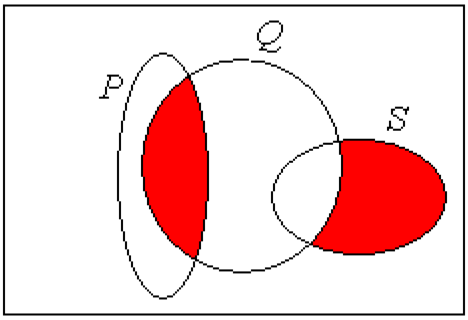


fig. b

________________________ ________________________

ESERCIZIO SVOLTO

E' stata organizzata una manifestazione di nuoto; i 30 atleti che vi hanno aderito si affrontano sulla distanza di 100 m nei quattro stili: stile libero, dorso, rana, delfino.

Tutti gli iscritti partecipano ad almeno una prova e gli atleti che gareggiano nella prova a delfino non partecipano ad alcuna altra prova. Inoltre, si sa che:

12 atleti si sono iscritti alla gara a stile libero; 10 alla gara a rana, 15 alla gara a dorso; 2 atleti gareggiano nei tre stili: stile libero, dorso e rana; 6 atleti partecipano alle gare a stile libero e dorso; 5 atleti partecipano solo alle gare a dorso, 3 atleti partecipano alle gare a stile libero e rana.

Stabilisci:

a) quanti sono i partecipanti alla prova a delfino;
b) quanti partecipano solo alla prova a stile libero;
c) quanti partecipano alle prove a rana e dorso, ma non a stile libero.

Per rispondere a queste domande rappresentiamo il problema con un “modello” nel quale inserire le informazioni date.

I partecipanti alla manifestazione possono essere divisi in quattro insiemi: uno per ogni stile di gara

Siano U = {*x / x è iscritto alla manifestazione*},

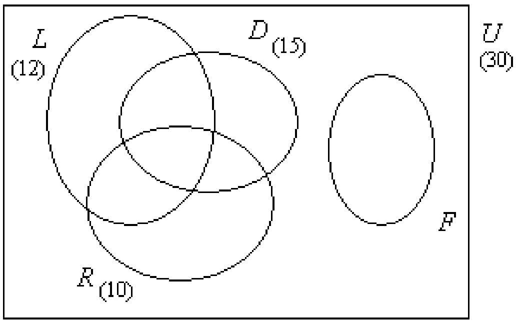
L = {*x / x partecipa alla gara a stile libero*},

D = {*x / x partecipa alla gara a dorso*},

R = {*x / x partecipa alla gara a rana*},

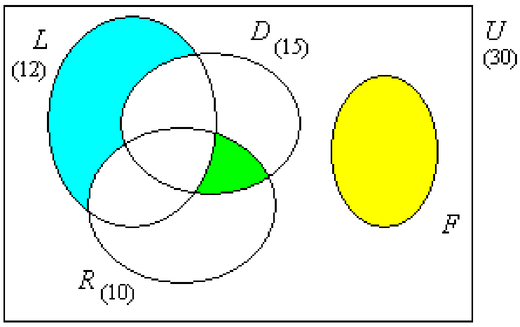
F = {*x / x partecipa alla gara a delfino*}.

Nel rappresentare gli insiemi mediante i diagrammi di Eulero – Venn, teniamo conto di alcune informazioni contenute nel testo:



- L, D, R, F sono sottoinsiemi di U
- l’insieme F è disgiunto da L, D, R
- $(L \cap D) \cap R \neq \emptyset$
- L ha 12 elementi
- D ha 15 elementi
- R ha 10 elementi

Le questioni poste richiedono di determinare il numero degli elementi di:

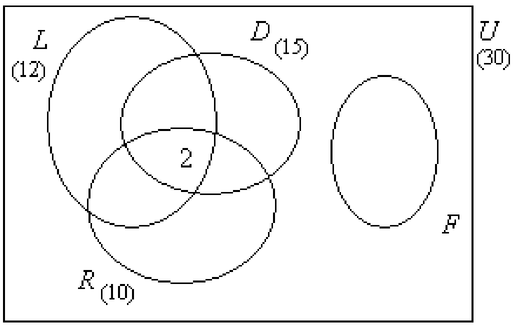


a) F (colore giallo nel diagramma)

b) $L - (D \cup R)$ (colore celeste nel diagramma)

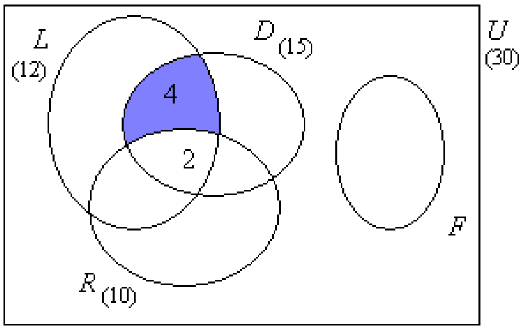
c) $(R \cap D) - L$ (colore verde nel diagramma)

Analizziamo, ora, le informazioni date dal problema.

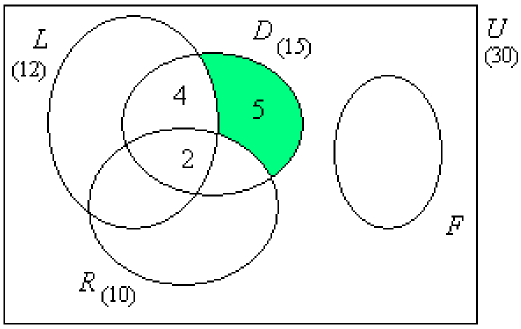


- Dai dati del problema emerge che $(L \cap D) \cap R$ è formato da 2 elementi; scriviamo, dunque, nella parte che rappresenta $(L \cap D) \cap R$, il numero 2.

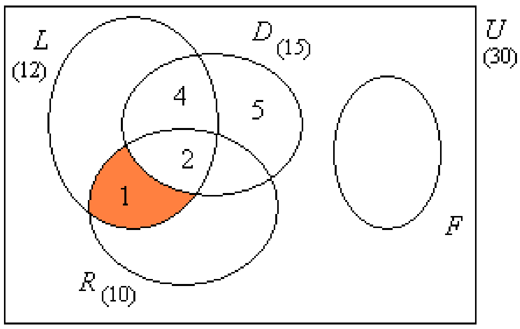
- Dai dati del problema si ha che $L \cap D$ è formato da 6 elementi; di questi 2 sono elementi di $(L \cap D) \cap R$, quindi $(L \cap D) - [(L \cap D) \cap R]$ (parte colorata) è formato da 4 elementi; scriviamo 4 nella parte colorata del diagramma.



- Dai dati del problema si rileva che $D - (L \cup R)$ (parte colorata del diagramma) è formato da 5 elementi; scriviamo 5 nella parte colorata.



- Dai dati del problema deduciamo che $L \cap R$ è formato da 3 elementi; di questi 2 sono elementi di $(L \cap D) \cap R$, quindi $(L \cap R) - [(L \cap D) \cap R]$ (parte colorata del diagramma) è formato da 1 elemento; scriviamo 1 nella parte colorata.



L'ultimo diagramma è il "modello" del problema; in esso sono riportate tutte le informazioni (*dati*) rilevate dal testo.

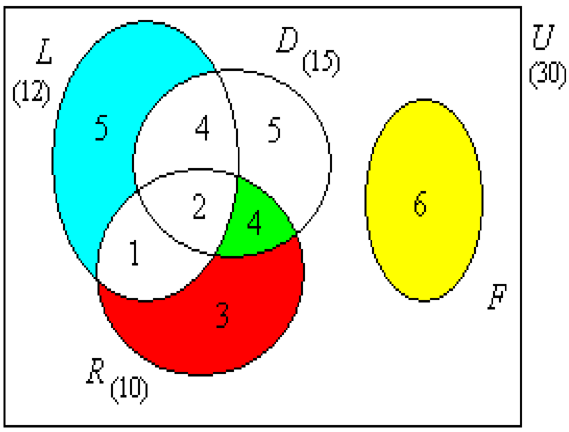
Completiamo il diagramma inserendo le informazioni mancanti che possiamo, adesso, dedurre.

I partecipanti alla sola prova a stile libero (cioè il numero di elementi di $L - (D \cup R)$ (colore celeste del diagramma) sono **12 – (4 + 2 + 1) = 5**.

Questa è la risposta alla domanda b).

I partecipanti alle prove a rana e dorso, ma non a stile libero, cioè il numero di elementi di $(R \cap D) - L$ (colore verde del diagramma) è **15 – (5 + 4 + 2) = 4**.

Questa è la risposta alla domanda c).



I partecipanti alla sola prova a rana, cioè il numero di elementi di $R - (L \cup D)$ (colore rosso del diagramma) sono 3.

Il numero di partecipanti alla sola prova a delfino, cioè il numero di elementi di F, è dato dalla differenza fra il numero degli iscritti alla manifestazione (30) e il numero degli elementi di $(L \cup D) \cup R$ che, come puoi facilmente rilevare dal diagramma, è 24; l'insieme F è formato da **30 – 24 = 6** elementi.

Questa è la risposta alla domanda a).

PROVA TU

Dall'indagine svolta fra i 60 soci di un circolo sportivo è emerso che alcuni praticano il calcio, altri il basket ed altri ancora il tennis, ma nessun socio pratica tutti e tre gli sport. Inoltre, 24 soci praticano il basket e 20 il tennis; 15 soci praticano solo il calcio, mentre 6 soci praticano sia il basket che il calcio, 5 soci praticano sia il calcio che il tennis e 7 soci praticano sia il basket che il tennis. Quanti soci praticano solo il basket? Quanti soci non praticano alcuno dei tre sport?

(Risolvi il problema con i diagrammi di Eulero – Venn, come nell'esercizio svolto).

I soci del circolo sportivo possono essere divisi nei seguenti insiemi:

U = {*x / x è socio del circolo sportivo*},

C = { *x / x è socio del circolo sportivo che pratica il calcio*},

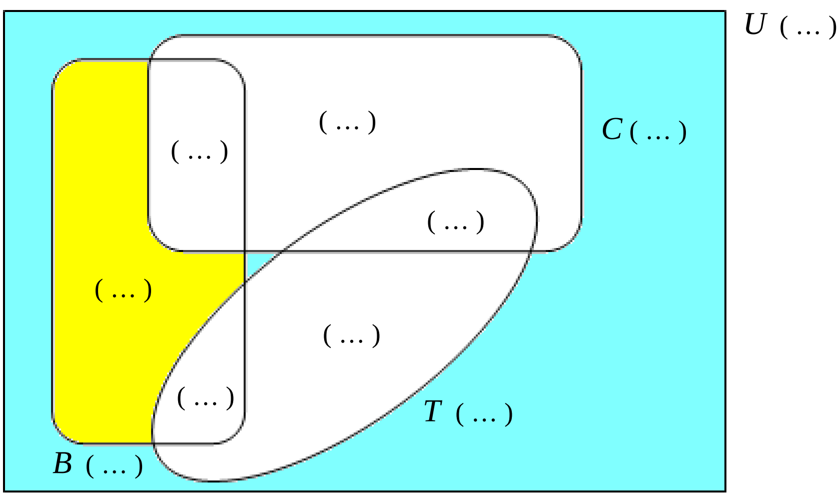
B = { *x / x è socio del circolo sportivo che pratica il basket*},

T = { *x / x è socio del circolo sportivo che pratica il tennis*}.

Nella rappresentazione grafica è necessario tenere conto delle seguenti informazioni:

- U è formato da ………. elementi
- C, B, T sono sottoinsiemi di U
- $(C \cap B) \cap T = \varnothing$
- B è formato da ………. elementi
- T è formato da ………. elementi

Completa il seguente diagramma nel quale è colorato di giallo l'insieme dei soci che praticano solo il basket e di celeste l'insieme dei soci che non praticano alcuno sport.



ESERCIZI CAPITOLO 1

Gli insiemi

<u>Conoscenza e comprensione</u>

1) Come può essere “definito” un insieme?

2) Come si indica, in generale, un insieme? E un elemento di un insieme?

3) Scrivi, a fianco di ciascun insieme, il simbolo con il quale esso viene indicato:

a) l’insieme dei numeri naturali: **……**

b) l’insieme dei numeri interi relativi: **……**

c) l’insieme dei numeri razionali: **……**

4) Le seguenti collezioni di oggetti sono insiemi:

a) I colori dell’arcobaleno.	V	F
b) I migliori giocatori di calcio.	V	F
c) Le stelle più luminose dell’Universo.	V	F
d) I minerali della Terra.	V	F
e) Le stelle nane rosse dell’Universo.	V	F

5) Una sola delle seguenti scritture indica che *a* è un elemento dell’insieme *B*. Quale?

a) $a \subseteq B$

b) $A \in B$

c) $a \in B$

d) $B \supset a$

e) $B \in a$

6) Una sola delle seguenti scritture indica che *b* non è un elemento dell’insieme *F*. Quale?

a) $b \not\subset F$

b) $b \notin F$

c) $b \in F$

d) $F \supset b$

e) $F \notin b$

7) Quali delle seguenti scritture indicano l’insieme vuoto?

$$\{\} \quad ; \quad \{\varnothing\} \quad ; \quad 0 \quad ; \quad \{0\} \quad ; \quad \varnothing.$$

8) In quali modi si può rappresentare un insieme? Fai un esempio per ciascuno di essi.

9) Sia $C = \{x \,/\, x$ è un colore della bandiera italiana$\}$; completa con i simboli $\in$, $\notin$:

a) bianco ….. C	d) nero ….. C
b) rosa ….. C	e) viola ….. C
c) rosso ….. C	f) azzurro ….. C

10) Sia $B = \{x \in \boldsymbol{N} \,/\, x$ è divisore di $15\}$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

a) $1 \in B$

b) $15 \notin B$

c) $3 \subset B$

d) $B \supset 5$

e) $\{3\} \in B$

11) Sia $A = \{x \,/\, -5 < x < 3\}$. È possibile rappresentare l'insieme A ? Giustifica la tua risposta.

12) Che cosa si intende per sottoinsieme di un dato insieme?

13) Quando, un sottoinsieme di un insieme si dice proprio? Quali sono i sottoinsiemi impropri?

14) Spiega perché le seguenti scritture non sono corrette e, successivamente, riscrivile correttamente:

a) $\clubsuit \subset \{\blacklozenge, \heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$	e) $\varnothing \in B$
b) $A \subset A$	f) $4 \notin \{x \in \boldsymbol{Z} \,/\, -3 < x \leq 4\}$
c) $\{1, 5\} \supset \{1, 3, 5, 9\}$	g) $\{a\} \in \{a, e, i, o, u\}$
d) $\{0\} \in \{-2, 0, 2\}$	h) $\mathrm{B} \supset \varnothing$

15) Che cos'è l'insieme delle parti di un insieme? Con quale simbolo viene indicato?

16) Se m è il numero degli elementi di un insieme A, qual è il numero degli elementi dell'insieme delle parti di A ?

17) Sia $B = \{x \in \boldsymbol{N} \,/\, x = 2 \cdot n$, con $n \in \boldsymbol{N} \wedge 0 \leq n < 3\}$. Allora:

a) $0 \in \mathcal{P}(B)$	V	F	f) $\varnothing \in \mathcal{P}(B)$	V	F
b) $6 \in B$	V	F	g) $\{2\} \in \mathcal{P}(B)$	V	F
c) $B \in \mathcal{P}(B)$	V	F	h) $\{\{0\},\{2\}\} \subset \mathcal{P}(B)$	V	F
d) $\{0, 2\} \subset \mathcal{P}(B)$	V	F	i) $1 \in B$	V	F
e) $0 \in B$	V	F	l) $\varnothing \subseteq \mathcal{P}(B)$	V	F

18) Come è definita l'operazione di unione di due insiemi? Scrivila con i simboli del linguaggio matematico.

19) Come è definita l'operazione di intersezione di due insiemi? Scrivila con i simboli del linguaggio matematico.

20) Quali proprietà valgono per l'operazione di unione di due insiemi? E per l'operazione di intersezione?

21) Quando due insiemi si dicono disgiunti?

22) Che cos'è una partizione di un insieme?

23) Sia A un insieme. Esiste una sola partizione di A ? Giustifica la tua risposta.

24) Sia $G = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Quale, fra i seguenti insiemi, è una partizione di G ?

a) $\{\{-2\}, \{0, 2\}, \{-1, 2\}, \{1, 3\}\}$.

b) $\{\{-2, 0, 2\}, \{1\}, \{-1, 3\}, \{\}\}$.

c) $\{\{-2, 2\}, \{0\}, \{1, 3\}, \{-1\}\}$.

d) $\{\{-2, 0\}, \{1, 3\}, \{-1\}\}$.

e) $\{\{-2\}, \{0, 2, -1\}, \{1, 3\}, \varnothing\}$.

25) Come è definita l'operazione di differenza di due insiemi? Scrivila con i simboli del linguaggio matematico.

26) Siano A e B due insiemi tali che $A \subset B$. Che cosa si intende per insieme complementare di A rispetto a B ? Con quale simbolo si indica? Scrivi la sua definizione con i simboli del linguaggio matematico.

27) Per la differenza fra insiemi, vale la proprietà commutativa? Giustifica, anche con degli esempi, la tua risposta.

28) Come è definita l'operazione di prodotto cartesiano di due insiemi? Scrivila con i simboli del linguaggio matematico.

29) Come può essere rappresentato il prodotto cartesiano di due insiemi?

30) Quali proprietà valgono per l'operazione di prodotto cartesiano di due insiemi?

31) Siano $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ due insiemi. Completa, inserendo i simboli delle operazioni fra insiemi, in modo che siano verificate le seguenti uguaglianze:

a) A **…..** $B = \{0, 1, 2\}$.

b) B **…..** $A = \{-3, -2, -1\}$.

c) B **…..** $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.

d) $(-2, 4) \in B$ ….. A.

Esercizi

Insiemi e rappresentazione di un insieme

1) Stabilisci se le seguenti collezioni di oggetti costituiscono degli insiemi:

a) I ragazzi più alti di Brindisi.

b) I pianeti del Sistema solare.

c) I numeri naturali maggiori di 298.

d) Le frazioni più piccole.

e) Gli esseri viventi unicellulari della Terra.

f) Gli aerei più veloci.

2) Rappresenta nel modo che ritieni opportuno i seguenti insiemi:

"I numeri naturali minori di 9";

"I giorni della settimana";

"I numeri razionali minori 3";

"Le vocali della parola 'spazio' ";

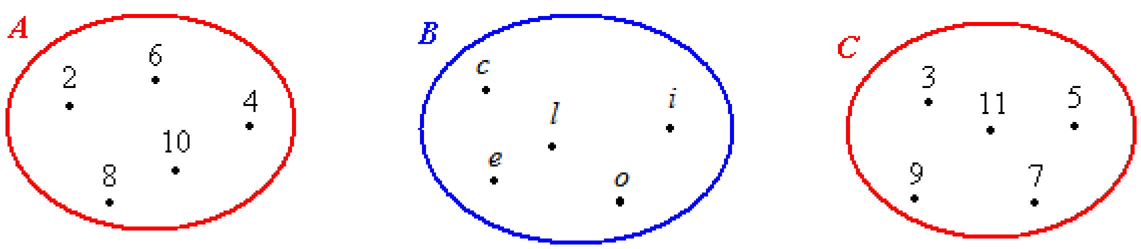
"I numeri interi relativi maggiori di –14";

"Le persone residenti a Brindisi";

"I multipli di 5 minori di 4";

"I numeri pari multipli di 3".

3) Rappresenta i seguenti insiemi mediante la rappresentazione tabulare e per caratteristica:



4) I seguenti insiemi sono rappresentati in forma tabulare; rappresentali mediante i diagrammi di Venn e per caratteristica:

$C = \{5,\ 8,\ 11,\ 14,\ 17\}$;

$F = \{\text{Mercurio, Venere}\}$;

$H = \{12, 16, 20, 24, 28\}$;

$K = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.

5) Rappresenta gli insiemi:

K = {x / x è una lettera della parola "*calcio*"};

M = {x / x è una consonante della parola "*palco*"};

S = $\{x \in \boldsymbol{Z} \,/\, -4 \le x < 3\}$,

mediante i diagrammi di Venn e completa le seguenti proposizioni inserendo i simboli $\in$, $\notin$:

a) o **…** K;	f) a **…** M;
b) 3 **…** S;	g) 0 **…** S;
c) l **…** M;	h) a **…** K;
d) -4 **…** S;	i) p **…** K;
e) -5**…** S;	l) i **…** M.

6) Rappresenta, sotto forma tabulare e mediante i diagrammi di Venn, gli insiemi:

$$A = \left\{ x \in \boldsymbol{Z} \,/\, x = \frac{2 \cdot n + 1}{n-1} \ \wedge\ n = -2,\ -1,\ 0,\ 2 \right\};$$

$$B = \{x \in \boldsymbol{N} \,/\, x = 3 \cdot m - 2, \text{ con } m \in \boldsymbol{Z} \ \wedge\ -2 < m \le 2\};$$

$$C = \left\{ x \in \boldsymbol{N} \,/\, x = t^2 - 2 \cdot t + 1 \ \wedge\ t = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4 \right\};$$

$$D = \left\{ x \in \boldsymbol{N} \,/\, x = \frac{n}{2} + \frac{n}{3} - 4 \cdot n \ \wedge\ n = \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ 3 \right\}.$$

7) Rappresenta mediante la rappresentazione per caratteristica i seguenti insiemi:

T = {10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31};

P = {– 4, – 3, – 2, – 1 , 0, 1, 2};

L = {1, 10, 100, 1000, 10000};

E = {16, 8, 0, 20, 12, 4};

F = {2, 5, 10, 17, 26, 37}.

8) Rappresenta, se possibile, mediante i diagrammi di Venn gli insiemi:

$$B = \left\{ x \in \boldsymbol{N} \,/\, x = 5k - 7,\ k = 0,\ 2,\ 4,\ 6 \right\};$$

$$F = \left\{ x / x \text{ è una consonante della parola "}parco\text{"} \right\};$$

$$L = \left\{ x / x < 2 \right\};$$

$$S = \left\{ x \in Q / x = \frac{h^2 - 1}{2h} \ ,\ 2 < h < 6 \right\}.$$

Sottoinsiemi

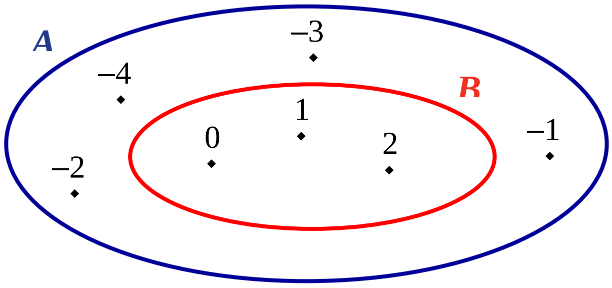
Esempio

Dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbf{Z} \,/\, -4 \leq x < 3\}$ e $B = \{0, 1, 2\}$, stabilisci se B è un sottoinsieme di A e rappresenta gli insiemi con i diagrammi di Venn.

Determiniamo gli elementi di A; essi sono : $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2$.

Osserviamo che tutti gli elementi di B sono elementi di A, quindi ***B* è un sottoinsieme di *A***. Notiamo, anche, che esistono elementi di A che non appartengono a B; quindi B è un sottoinsieme proprio di A.

Riportiamo gli elementi di A all'interno di una linea chiusa e, all'interno di tale linea, tracciamo un'altra linea chiusa che racchiuda gli elementi di B. Si ottiene la seguente rappresentazione:



9) Rappresenta gli insiemi $B = \{x \,/\, x$ è una lettera della parola "pali"$\}$, $C = \{x \,/\, x$ è una lettera della parola "palla"$\}$ e $D = \{x \,/\, x$ è una lettera della parola "palio"$\}$ con i diagrammi di Venn; successivamente stabilisci se:

a) B e C sono sottoinsiemi propri o impropri di D;

b) C è un sottoinsieme proprio o improprio di B.

10) Dopo aver rappresentato graficamente gli insiemi $A = \{-2, 3, 5, 0, -4\}$ e $B = \{0, -2, 5\}$, stabilisci quale delle seguenti proposizioni è vera:

$$A = B \quad ; \quad A \subset B \quad ; \quad B \subset A.$$

11) Sia $A = \{x \,/\, x$ è una vocale della parola "casa"$\}$; scrivi tutti i sottoinsiemi propri di A.

12) Sia $G = \{-2, 0, 4\}$. Scrivi tutti i sottoinsiemi impropri di G.

13) Sia $M = \{x \in \mathbf{Z} \,/\, -3 < x < 5\}$. Uno solo dei seguenti insiemi è un sottoinsieme di M. Quale?

a) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

b) $\{-2, 0, 1, 5, 6\}$

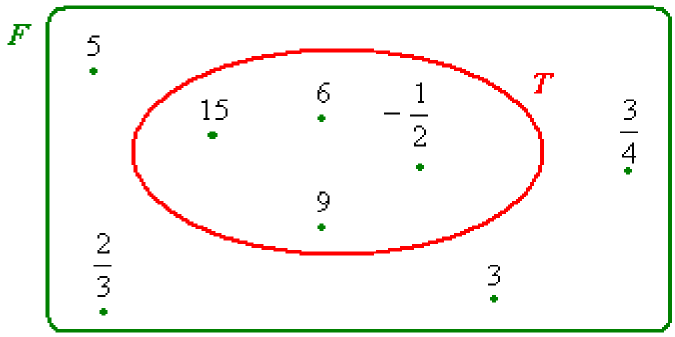
c) $\{-3, -2, -1, 3, 4, 5\}$

d) $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

e) $\{-2, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

14) Sia $S = \{x \in \boldsymbol{N} \,/\, x = 4 \cdot a + 2$, con $a = 1, 3, 5, 7\}$; l'insieme $R = \{6, 20, 14\}$ è un sottoinsieme di S ? Giustifica la tua risposta.

15) Osserva la figura e completa:



a) $3 \cdot 7 - 6$ **….** T;

b) $\frac{3}{2} - 2$ **….** T;

c) $15 - 3 \cdot 4$ **….** T;

d) $\frac{7}{4} - 4$ **….** F;

e) $\frac{3}{2} - 1$ **….** T;

f) $3 \cdot 8 - 2 \cdot 9$ **….** T;

g) $\frac{1}{3} \cdot 6 - \left(\frac{5}{3} - \frac{5}{12}\right)$ **….** F;

h) $9 - 6 + 5$ **….** F;

i) $14 : 2 + 5$ **….** T;

l) $\frac{5}{6} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$ **….** F;

m) $7 \cdot 8 - 17 \cdot 3$ **….** T;

n) $\frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{2}{3}$ **….** T.

16) Sia $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $B = \{x \in \boldsymbol{Z} \,/\, x^2 = -4\}$. Quale delle seguenti proposizioni è vera? E perché?

a) $B \subseteq A$;

b) $B \subset A$;

c) $B \not\subset A$;

d) $A \subset B$;

e) $A = B$.

17) Dopo aver rappresentato in forma tabulare e con i diagrammi di Venn gli insiemi:

$A = \{x \,/\, x$ è una lettera della parola "coppia"$\}$;

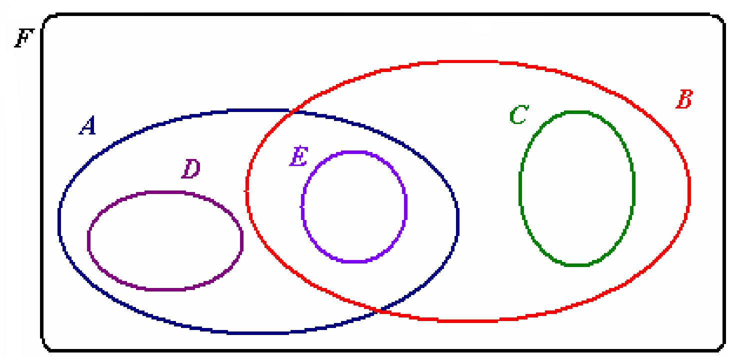
$B = \{x \,/\, x$ è una lettera della parola "coppa"$\}$;

$C = \{x \,/\, x$ è una lettera della parola "ceppo"$\}$,

stabilisci se le seguenti proposizioni sono vere o false:

a) $B \subseteq A$	V	F	e) $A = C$	V	F
b) $C \not\subset B$	V	F	f) $C = B$	V	F
c) $B \supseteq C$	V	F	g) $A \supset C$	V	F
d) $C \subset B$	V	F	h) $A \supset B$	V	F

18) Osserva la seguente figura e completa inserendo, in maniera opportuna, i simboli $\subset, \subseteq, \not\subset, \supset, \supseteq$:



a) A ….. B ;	e) D ….. A ;	i) E ….. B ;
b) B ….. F ;	f) E ….. C ;	l) D ….. B ;
c) A ….. F ;	g) C ….. F ;	m) B ….. C ;
d) F ….. E ;	h) $\varnothing$ ….. B ;	n) A ….. A .

19) Siano $A = \left\{x \in \mathbf{Z} \,/\, x = \dfrac{2k-1}{k+1}, \text{con } k = 0, 1, 2\right\}$ e $B = \left\{x \in \mathbf{Z} \,/\, x^2 = 1\right\}$ due insiemi.

Quali delle seguenti proposizioni sono corrette?

$A = B$; $A \subseteq B$; $A \supset B$; $2 \in A$; $B \subseteq A$; $\{1\} \in B$; $\{-1\} \subset A$.

20) Sia $M = \{m\}$; quali delle seguenti scritture non sono corrette?

$m \in M$; $\{m\} \subset M$; $\varnothing \subseteq M$; $\{m\} \in M$; $\{\} \subset M$.

21) Sia $T = \{a, e, u\}$. Scrivi tutti i sottoinsiemi propri di T.

22) Dati gli insiemi:

$G = \{x \in \mathbf{N} \,/\, x = 3 \cdot n, \text{con } n \in \mathbf{N} \text{ e } 0 \le n \le 10\}$;

$H = \{x \in \mathbf{N} \,/\, x = 4 \cdot n, \text{con } n \in \mathbf{N} \text{ e } 0 \le n < 8\}$,

determina almeno tre insiemi che siano sottoinsiemi sia di G che di H. Rappresenta, successivamente, i sottoinsiemi trovati per caratteristica.

23) Sia $A = \{b, c, d\}$; determina tutti i possibili sottoinsiemi di A e rappresenta in forma tabulare l'insieme $\mathcal{P}(A)$.

24) L'insieme $A = \{\{s\}, \{t\}, \{s, t\}\}$ rappresenta l'insieme delle parti di un insieme? Giustifica la tua risposta.

25) Sia $\mathcal{P}(C) = \{\{7\}, \{3\}, \{0\}, \{7,3\}, \{7,0\}, \{0,3\}, \{\}, \{3, 7, 0\}\}$; qual è l'insieme C ?

26) Sia $D = \{x \,/\, x$ è una lettera della parola “catastrofe”$\}$. Quanti sono gli elementi di $\mathcal{P}(D)$?

27) Sia $S = \{x \in \boldsymbol{N} \,/\, x = 2 \cdot n - 5$, con $n = 0, 1, 2\}$. Quanti sono gli elementi di $\mathcal{P}(S)$? Elencali.

28) Sia $B = \{x \in \boldsymbol{Z} \,/\, x^2 = 9\}$. Uno solo dei seguenti insiemi è l’insieme $\mathcal{P}(B)$. Quale?

a) $\{\{3\}, \{-3\}, \varnothing\}$;

b) $\{\{-3, 3\}, \{3\},\{-3\}\}$;

c) $\{\{3\}, \varnothing\}$;

d) $\{\{-3\}, \{3\}, \{\}, \{-3, 3\}\}$;

e) $\{-3, 3\}$.

29) Completa in modo che l’insieme $\{\{7\},\{7, 9\}, \varnothing,$ **…..** $\}$ rappresenti l’insieme delle parti di un insieme.

30) Sia dato l’insieme $B = \left\{ x \in \boldsymbol{Z} \,/\, x = \dfrac{n+2}{n-1},\ \text{con } n \in \boldsymbol{Z} \ \wedge\ -2 \leq n < 1 \right\}$.

Una sola proposizione è falsa; quale?

a) $B = \{0, -2\}$;

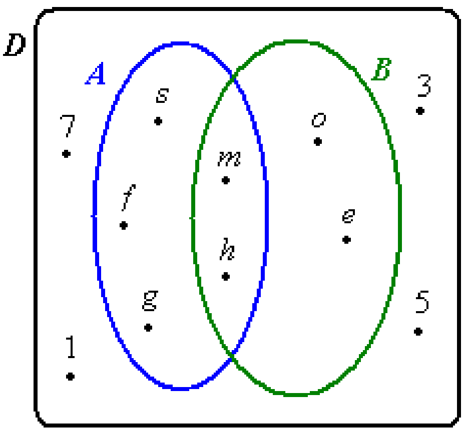
b) $0 \in B$;

c) $\{0, -2\} \subset \mathcal{P}(B)$;

d) $\{0, -2\} \subseteq B$;

e) $\{\{0\}, \{-2\}\} \in \mathcal{P}(B)$.

31) Osserva la figura e completa inserendo, in maniera opportuna, i simboli $\in$, $\notin$, $\subset$, $\subseteq$, $\supset$, $\supseteq$, $\not\subset$:



a) $\{s, m\}$ **…..** B;

b) D **…..** A;

c) $\{o, 3\}$ **…..** D;

d) $\{m, h, o, e\}$ **…..** B;

e) $\{1, 3, 7, 5\}$ **…..** D;

f) 3 **…..** A;

g) $\varnothing$ **…..** D;

h) e **…..** D;

i) f **…..** A;

l) 7 **…..** B;

m) h **….** A;

n) $\{s, f\}$ **…..** A;

o) $\{m\}$ **…..** B;

p) g **…..** B;

q) A **…..** $\{s, m, g, h, f\}$;

r) $\{1, h\}$ **…..** D.

Operazioni tra insiemi

Unione e intersezione

Esempio:

Dati $A = \{x \in \mathbf{N} \ / \ 3 < x < 8\}$ e $B = \{x \in \mathbf{N} \ / \ x < 10 \wedge x \text{ è pari}\}$, rappresentiamo in forma tabulare e con i diagrammi di Venn gli insiemi $A \cup B$ e $A \cap B$.

Rappresentiamo, innanzi tutto, in forma tabulare gli insiemi A e B; si ha che:

$A = \{4, 5, 6, 7\}$;

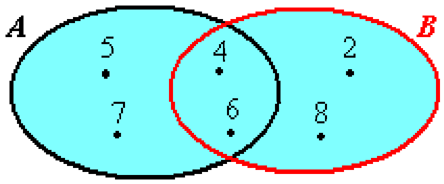
$B = \{2, 4, 6, 8\}$.

- L'**unione** di A e B è l'insieme formato dagli elementi che appartengono ad A o a B, riportando una sola volta gli elementi in comune. La rappresentazione tabulare dell'unione dei due insiemi è la seguente:

  $A \cup B = \{2, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Rappresentiamo $A \cup B$ con i diagrammi di Venn (colore celeste della figura)

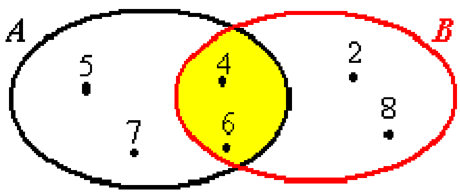
A tale scopo, osserviamo che gli insiemi A e B hanno alcuni elementi in comune; allora rappresentiamo A e B in modo che le due linee chiuse, una per l'insieme A ed una per l'insieme B, si intersechino e nella parte comune inseriamo gli elementi in comune:



- L'**intersezione** di due insiemi è l'insieme formato dagli elementi *comuni* ai due insiemi. La rappresentazione tabulare di $A \cap B$ è, quindi:

  $A \cap B = \{4, 6\}$

Rappresentiamo $A \cap B$ con i diagrammi di Venn (colore giallo della figura):



32) Per ciascuna delle seguenti coppie di insiemi, rappresenta in forma tabulare e con i diagrammi di Venn gli insiemi $A \cup B$ e $A \cap B$:

a) $A = \{m, s, a, t, e\}$ e $B = \{a, b, c, s, e\}$;

b) $A = \{1, 3, 5, 7\}$ e $B = \{-2, 0, 2, 3, 5\}$;

c) $A = \{x$ / x è una consonante di " latte"$\}$ e $B = \{x$ / x è una lettera di " moto"$\}$;

d) $A = \{x \in \boldsymbol{N} / 2 < x < 6\}$ e $B = \{x \in \boldsymbol{N} / x = 2 \cdot n$, con $n = 0, 1, 2, 3\}$;

e) $A = \{x \in \boldsymbol{N} / 2 < x < 8\}$ e $B = \{x \in \boldsymbol{N} / x + 2 = 10\}$.

33) Dati gli insiemi $A = \{x$ / x è una vocale di "podere"$\}$, $B = \{x$ / x è una lettera di "dopo"$\}$ e $C = \{o, p, d, i\}$. Determina la rappresentazione tabulare dei seguenti insiemi:

$A \cap B$; $B \cup C$; $B \cap C$; $A \cap C$; $B \cup (A \cap C)$; $A \cap (B \cup C)$.

34) Dati gli insiemi $A = \left\{x \in \boldsymbol{Z} / x = \dfrac{2n+3}{2n-1}, \text{con } n = -1, 0, 1\right\}$ e $B = \{x \in \boldsymbol{Z} / x + 1 = 4\}$; rappresenta, nel modo che ritieni più opportuno, $A \cap B$.

35) Dati gli insiemi $A = \{x$ / x è uno dei giorni della settimana che inizia con la lettera "m"$\}$ e $B = \{$Domenica, Lunedì$\}$; determina $A \cup B$ e $A \cap B$.

36) Dati gli insiemi $F = \{x \in N / x + 2 = 0\}$ e $G = \{-1, 1, 3\}$, determina $F \cup G$ e $G \cap F$.

37) Siano $A = \{x \in \boldsymbol{Z} / -3 \le x < 2\}$ e $B = \{x \in \boldsymbol{N} / 0 \le x \le 4\}$ due insiemi. Una sola delle seguenti proposizioni è falsa. Quale?

a) $\{-3, 3\} \subset A \cup B$;

b) $\{0, 1\} \subset A \cap B$;

c) $-2 \in A \cup B$;

d) $A \cap B = \emptyset$;

e) $1 \in A \cap B$.

Differenza fra insiemi e insieme complementare

38) Per ciascuna delle coppie di insiemi dell'esercizio 32), rappresenta in forma tabulare e mediante la rappresentazione grafica gli insiemi $A - B$ e $B - A$.

39) Dati gli insiemi $S = \{x \in \boldsymbol{N}$ / x è un divisore di $54\}$ e $T = \{x \in \boldsymbol{N}$ / x è un divisore di $45\}$, determina gli insiemi $S - T$ e $T - S$.

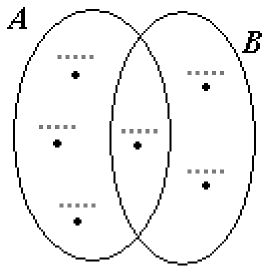
40) Siano $A = \left\{ x \in \boldsymbol{Q} \;/\; \boldsymbol{x} = \dfrac{n+3}{n}, \text{con } n = -2, -1, 1, 2 \right\}$ e $B = \{x \in \boldsymbol{N} \;/\; 0 \leq x \leq 4\}$ due insiemi. Rappresenta, mediante i diagrammi di Venn, l'insieme $B - A$.

41) Completa il diagramma sapendo che:

$A - B = \{1, 2, 4\}$;

$B - A = \{8, 9\}$;

$A \cup B = \{1, 2, 4, 7, 8, 9\}$.



42) Dati gli insiemi $M = \{-4, -2, 0, 2, 4, 6, 8\}$, $P = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ e $S = \{-3, -1, 1, 3, 5\}$, rappresenta in forma tabulare i seguenti insiemi:

a) $M - (P \cup S)$;

b) $(P - M) \cap S$;

c) $(M \cap S) - P$;

d) $(M - P) \cap S$;

e) $(M \cap P) - S$.

43) Completa inserendo gli elementi mancanti:

a) $\{-4, \ldots\ldots, 3, 1\} - \{\ldots\ldots, 7, 1, 9\} = \{5, 3\}$;

b) $\{a, e, \ldots\ldots, g\} - \{a, b, e, c\} = \{\ldots\ldots, f\}$.

44) Siano $P = \{x \;/\; x$ è un mese che inizia con la lettera "a"$\}$ e $M = \{x \;/\; x$ è un mese dell'anno$\}$ due insiemi. Rappresenta in forma tabulare, con i diagrammi di Eulero - Venn e per caratteristica l'insieme $\overline{P}_M$.

45) Siano dati gli insiemi $A = \{x \in \boldsymbol{Z} \;/\; x = k - 3, \text{ con } k \in \boldsymbol{N} \wedge -3 < k < 2\}$ e $B = \{-3, -2\}$.

Quali delle seguenti proposizioni sono false?

$\overline{B}_A \neq \varnothing$; $\quad \overline{A}_B \neq \varnothing$; $\quad -5 \in \overline{B}_A$; $\quad -3 \in B \cap \overline{B}_A$.

46) Qual è il complementare, rispetto ad $\boldsymbol{N}$, dell'insieme dei numeri dispari?

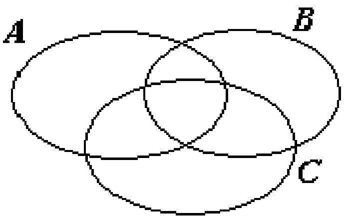
47) Qual è il complementare, rispetto a $\boldsymbol{Z}$, dell'insieme $\boldsymbol{N}$?

48) Siano A e B due insiemi tali che $A \subset B$; stabilisci se le seguenti proposizioni sono vere o false:

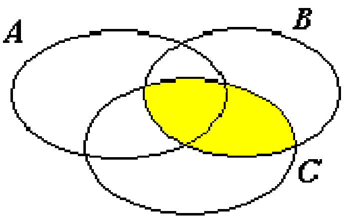
a) $A \cup B = A$	V	F
b) $\overline{A}_B = \varnothing$	V	F
c) $A \cap B = A$	V	F
d) $A \cup \overline{A}_B = B$	V	F
e) $A \cap \overline{A}_B = A$	V	F
f) $B \cap \overline{A}_B = \overline{A}_B$	V	F

<u>Esempio</u>:

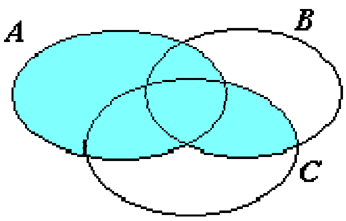
Nella seguente figura, coloriamo l'insieme $A \cup (B \cap C)$.



In una espressione si risolvono prima le parentesi tonde, quindi coloriamo di giallo $B \cap C$, cioè la parte in comune fra gli insiemi B e C; si ottiene:



Determiniamo, adesso, l'unione fra questo nuovo insieme e l'insieme A; si ottiene:



L'insieme richiesto è in colore celeste.

49) Per ciascuna delle seguenti figure, colora l'insieme indicato:

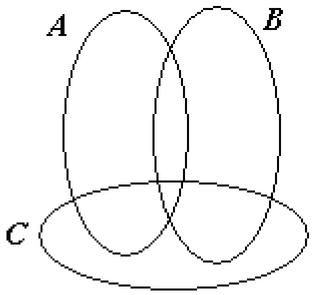


fig. 1

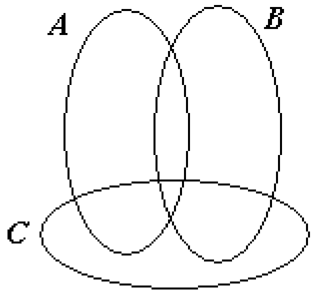


fig. 2

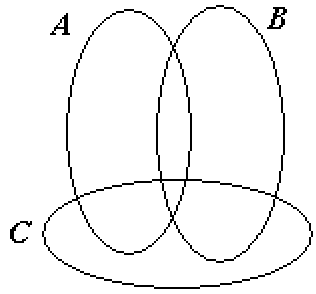


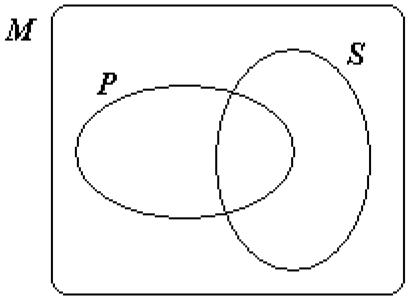
fig. 3

fig. 1: $(A \cap C) \cup B$;

fig. 2: $(B \cup C) \cap A$;

fig. 3: $(B \cap A) \cup (B \cap C)$.

50) Nel seguente diagramma sono rappresentati gli insiemi P, S, M. Riportalo più volte sul tuo quaderno e colora, se possibile, gli insiemi a fianco indicati:



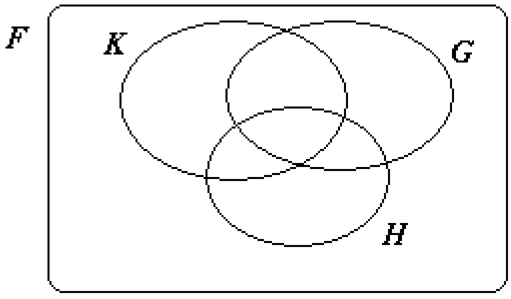
a) $P - S$;

b) $(S - P) \cap M$;

c) $\overline{P}_M \cap (P - S)$;

d) $(P \cap S) \cup \overline{S}_M$.

51) Riporta più volte sul tuo quaderno il seguente diagramma e colora gli insiemi indicati:



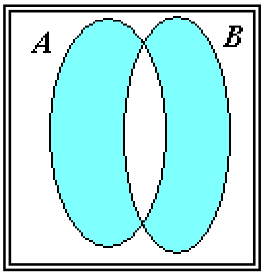
a) $\overline{(K \cap G)}_G \cup (H - G)$;

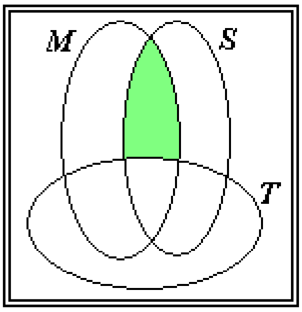
b) $(H - K) \cup \overline{(K \cap H)}_K$;

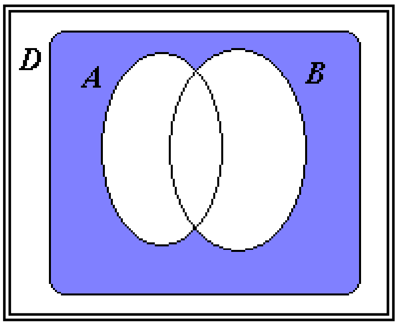
c) $(H \cap G) \cup (\overline{H}_F \cap G)$;

d) $\overline{(K \cup G) \cap (H - G)}_F$.

52) Determina un'espressione con le operazioni fra insiemi che rappresenti la parte colorata nei seguenti diagrammi:







_______________ _______________ _______________

Partizione

53) Determina una partizione dell'insieme $A = \{x \in \boldsymbol{N} \,/\, 0 < x < 10\}$.

54) Sia $M = \{x \,/\, x$ è un mese dell'anno$\}$, costruisci una partizione di M con tre sottoinsiemi di M.

55) Siano dati gli insiemi $B = \{x \,/\, x$ è una lettera della parola "aquilone"$\}$, $B_1 = \{x \,/\, x$ è una lettera della parola "qua"$\}$ e $B_2 = \{x \,/\, x$ è una lettera della parola "Lione"$\}$. L'insieme $\{B_1, B_2\}$ è una partizione di B ? Rappresenta gli insiemi con i diagrammi di Venn e giustifica la tua risposta.

56) Siano dati gli insiemi $A = \{x \in \boldsymbol{N} \,/\, x = 2 \cdot n + 1$, con $0 \le n < 8 \wedge n \in \boldsymbol{N}\}$, $A_1 = \{x \in \boldsymbol{N} \,/\, x$ è un divisore di $9\}$, $A_2 = \{x \in \boldsymbol{N} \,/\, 3 < x \le 13 \wedge x$ è primo$\}$ e $A_3 = \{x \in \boldsymbol{N} \,/\, x + 5 = 20\}$.
L'insieme $\{A_1, A_2, A_3\}$ è una partizione di A ?
Rappresenta gli insiemi con i diagrammi di Venn e giustifica la tua risposta.

57) Dati gli insiemi $A = \{0, 1, 2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{0, 6, 10\}$, $C = \{x \in \boldsymbol{N} \,/\, x$ è un divisore di $8\}$ e D $= \{x \in \boldsymbol{N} \,/\, x + 3 = 1\}$, l'insieme $\{B, C, D\}$ è una partizione di A ?
Giustifica la tua risposta.

Prodotto cartesiano

58) Dati gli insiemi $A = \{-2, 0, 2, 4\}$ e $B = \{1, 3\}$, rappresenta in tutti i modi possibili gli insiemi $A \times B$ e $B \times A$.

59) Siano dati gli insiemi $F = \{x \,/\, x$ è una lettera della parola "mondo"$\}$ ed $E = \{a, e\}$. Rappresenta in tutti i modi possibili l'insieme $F \times E$.

60) Dati gli insiemi $C = \{x / 3 \le x \le 7 \text{ e } x \in \mathbf{Z}\}$ e $D = \{x / -1 < x \le 2 \text{ e } x \in \mathbf{Z}\}$ rappresenta in tutti i modi possibili $D \times C$.

61) Siano dati gli insiemi $C = \{x \in \mathbf{Z} \,/\, x + 4 = 0\}$ e $D = \{x \in \mathbf{N} \,/\, x$ è un divisore di $3\}$. Rappresenta in forma cartesiana l'insieme $D \times C$.

62) Sia $A \times B = \{(1, 2), (3, 0), (1, 0), (3, 2), (5, 2), (5, 0)\}$. Rappresenta in forma tabulare gli insiemi A e B.

63) Sia $A \times B = \{(x, y) \,/\, x \in \mathbf{N} \wedge 0 < x < 6,\ \ y = x + 2\}$. Rappresenta nel modo che ritieni più opportuno gli insiemi A e B.

64) Dati gli insiemi $A = \{0, 3, 5\}$, $B = \{a, e\}$ e $C = \{4, 7, 9\}$, rappresenta con un diagramma ad albero ed in forma tabulare i seguenti insiemi:

$$(A \times B) \times C \quad ; \quad A \times (C \times B) \quad ; \quad C \times (B \times A).$$

65) Dati gli insiemi $A = \{x \,/\, x$ è una lettera di "terra"$\}$, $B = \{x \,/\, x$ è una lettera di "torero"$\}$ e $C = \{x \,/\, x$ è una lettera di "toro"$\}$, rappresenta, con un diagramma ad albero ed in forma tabulare, i seguenti insiemi:

$$A \times (B \times C) \quad ; \quad B \times (C \times \mathrm{A}) \quad ; \quad (A \times B) \times C.$$

66) Dati gli insiemi $A = \{b\}$, $B = \{-5, 1, 3\}$, $C = \{2, 4\}$ e $D = \{a, u\}$, calcola il prodotto cartesiano di ciascuno di essi per se stesso.

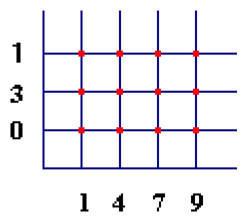
67) Inserisci al posto dei puntini le lettere opportune:

a) $\{\ldots., m, f\} \times \{a, \ldots.\} = \{(d, a), (\ldots., b), (m, \ldots.), (m, b), (\ldots., a), (f, \ldots.)\}$;

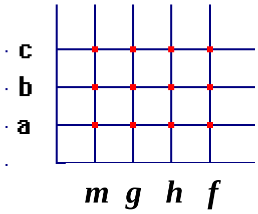
b) $\{1, \ldots., 6\} \times \{2, \ldots.\} = \{(\ldots., 2), (1, 5), (4, \ldots.), (\ldots., 5), (6, 2), (6, \ldots.)\}$;

c) $(\{6, \ldots., 9\} \cap \{7, \ldots., 4\}) \times \{1, \ldots.\} = \{(3, \ldots.), (\ldots., 2)\}$.

68) Nella seguente figura è rappresentato l'insieme $A \times B$. Determina le rappresentazioni tabulari di A e di B.



69) Nella seguente figura è rappresentato l'insieme $A \times B$.



Una sola delle seguenti proposizioni è vera. Quale?

a) $\{b\} \subset A$;

b) $(a, g) \in A \times B$;

c) $\{g, h\} \subset A$;

d) $(f, b) \in B \times A$;

e) $\{m, h\} \subset B$.

70) Siano dati gli insiemi $A = \{x \in \boldsymbol{N} \,/\, x$ è un divisore di $12\}$ e $B = \{x \,/\, x$ è un divisore di $30\}$. Una sola delle seguenti proposizioni è falsa. Quale?

a) $\{(2, 1), (6, 3)\} \subset B \times A$;

b) $\{(2, 1), (3, 6)\} \subset A \times B$;

c) $\{(2, 12), (4, 3)\} \subset B \times A$;

d) $A \times B \supset \{(4, 5), (3, 6)\}$;

e) $(3, 2) \in (A \times B) \cap (B \times A)$.

71) Siano dati gli insiemi $A = \{3, 6, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ e $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Rappresenta in forma tabulare i seguenti insiemi:

a) $A \times (B \cap C)$;

b) $[C - (B \cap A)] \times (B \cap A)$;

c) $(A \times B) \cap (B \times C)$;

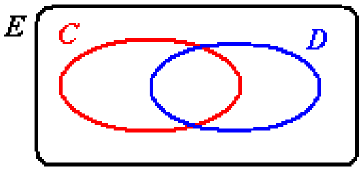
d) $(C - A) \times B$;

e) $[(A \cap B) \cup (A \cap C)] \times A$;

f) $(C \times B) - (B \times A)$.

Esercizi di riepilogo

72) In figura sono rappresentati tre insiemi:



Una sola delle seguenti proposizioni è falsa. Quale?

a) $(C - D) \cup (D - C) = (C \cup D) - (C \cap D)$;

b) $C \cup D \subset \mathcal{P}(C)$;

c) $C - D = \overline{D}_E \cap C$;

d) $\overline{(C \cup D)}_E \subset \overline{C}_E \cup \overline{D}_E$;

e) $\overline{(C - D)}_E \cap D \subseteq D$.

73) Sia $A = \{x \in \boldsymbol{N} \,/\, x$ è divisore di $45\}$; una sola delle seguenti affermazioni è vera. Quale?

a) $\mathcal{P}(A)$ ha 12 elementi ;

b) $(3, 9) \in A^2$;

c) $\{1, 15\} \in A^2$;

d) $(3, 5) \in A$;

e) $\mathcal{P}(A)$ è una partizione di A.

74) Siano dati gli insiemi $A = \{x \in \boldsymbol{N} \,/\, x$ è divisore di $45\}$, $B = \{x \in \boldsymbol{N} \,/\, x$ è divisore di $27\}$ e $C = \{x \in \boldsymbol{N} \,/\, x$ è divisore di $12\}$; quale delle seguenti affermazione è falsa?

a) $(1, 3, 1) \in B^2 \times C$

b) $(A \cap B) - C = \varnothing$

c) $(C \cap B) - A = (A \cap C) - B$

d) $\{9\} \subset \overline{(A - B)}_A$

e) $2 \in C - (A \cap B)$

75) Dati gli insiemi A, B e C dell'esercizio precedente; determina i seguenti insiemi:

a) $(A \cap B) \times (B \cap C)$;

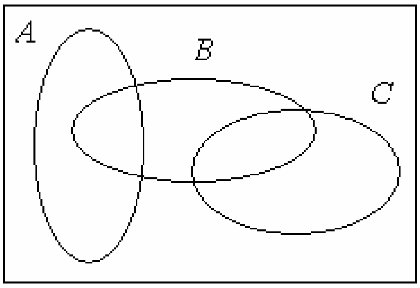
b) $\overline{(A \cap C)}_B \cup (B - A)$;

c) $B \times (C - A)$.

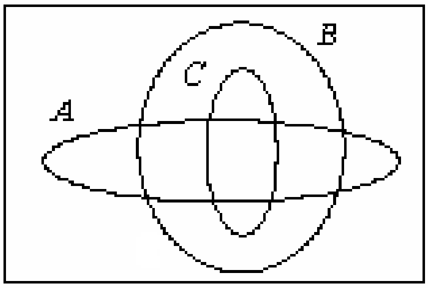
76) Siano S e T due insiemi generici; stabilisci se le seguenti proposizioni sono vere o false:

se	$T \cap S = S$,	allora	$S \subset T$	V	F ;
se	$T \cup S = T$,	allora	$S \subseteq T$	V	F ;
se	$p \in T$,	allora	$\{p\} \in \mathcal{P}(T)$	V	F ;
se	$S - T = S$,	allora	$T = \varnothing$	V	F ;
se	$T - S = \varnothing$,	allora	$S \subseteq T$	V	F ;
se	$T - S = \varnothing$,	allora	$S \subset T$	V	F ;
se	$S - T = T - S$,	allora	$T = S$	V	F ;
se	$S \times T = T \times S$,	allora	$S = T$	V	F .

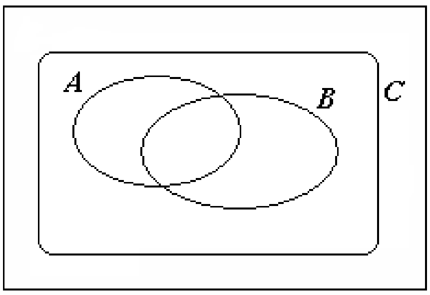
77) Per ciascuna delle seguenti figure, colora l'insieme indicato:



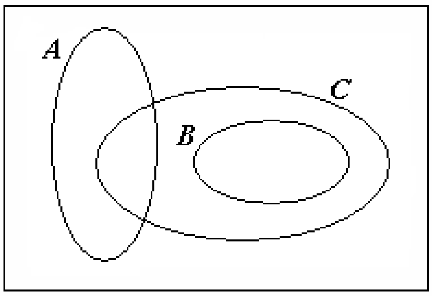
$(B \cap C) \cup (A \cap B)$



$\overline{(A - B)}_A \cup (B \cap C)$

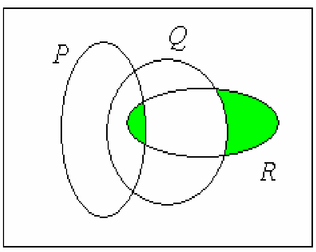


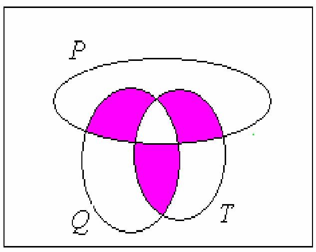
$\overline{A}_C \cap (B \cup A)$

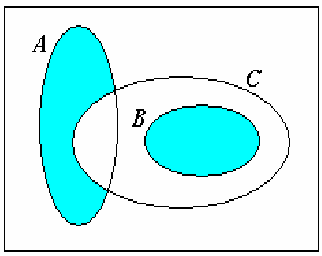


$[(A \cap C) \cup \overline{B}_C\,] \cap (A \cup B)$

78) Per ciascuna delle seguenti figure, determina un'espressione con le operazioni fra insiemi che rappresenti la parte colorata:







79) Fra i ragazzi di un condominio 25 hanno una bicicletta, 22 hanno i pattini, 20 possiedono uno skateboard e 6 non possiedono alcuno dei tre giochi; inoltre 9 ragazzi hanno tutti e tre i giochi, 4 soltanto la bicicletta, 2 soltanto lo skateboard e 6 possiedono sia la bicicletta che i pattini, ma non lo skateboard.

Quanti sono i ragazzi del condominio?

(Rappresenta il modello del problema utilizzando i diagrammi di Eulero – Venn).

[40]

80) Il comitato organizzatore della festa patronale del paese di Manigoldia vuole organizzare una serata musicale scegliendo il genere di musica preferito dalla maggior parte dei 585 ragazzi del paese.

Dall'indagine svolta è emerso che 423 ragazzi sono appassionati di almeno uno fra i generi Rock, House e Reggae; 75 amano Rock e House e, di questi, 45 non amano il Reggae; inoltre, 93 sono appassionati di House e Reggae e 73 di Rock e Reggae; 133 amano il Rock ma non la musica House e 130 amano la musica House ma non la musica Reggae.

Quale sarà il genere musicale della serata?

(Rappresenta il modello del problema utilizzando i diagrammi di Eulero – Venn).

[House]

81) Il responsabile della biblioteca dell'Istituto "Gobbar" ha avuto l'incarico dal Dirigente Scolastico dell'acquisto di alcuni libri per favorire la lettura da parte degli alunni dell'Istituto.

Agli alunni viene sottoposto un questionario nel quale esprimere la preferenza fra romanzo storico, romanzo giallo e romanzo d'avventura.

Dal questionario è emerso che su 666 alunni:

- 55 alunni gradiscono tutti e tre i generi;
- 127 alunni gradiscono il romanzo giallo e quello d'avventura;
- 95 alunni gradiscono il romanzo storico e quello giallo, ma non quello d'avventura;
- 178 alunni gradiscono il romanzo d'avventura e almeno uno fra il romanzo storico e quello giallo;
- 36 gradiscono solo il romanzo storico;
- 419 almeno uno fra il romanzo storico ed il romanzo giallo;
- 513 alunni gradiscono almeno uno fra il romanzo giallo e quello d'avventura.

A quanti alunni della scuola non piace nessuno dei tre generi?

(Rappresenta il modello del problema utilizzando i diagrammi di Eulero – Venn).

[117]

82) Ai 24 alunni della 3C, il professore d'Italiano chiede di vedere un documentario su Dante Alighieri che sarà trasmesso in televisione quella sera; il professore di Fisica dice ai ragazzi che non devono assolutamente perdere il servizio su Albert Einstein che sarà trasmesso in serata in televisione.

Per fortuna, le due trasmissioni sono state programmate in orari diversi.

Il giorno dopo il professore di Italiano chiede ai ragazzi se hanno visto la trasmissione su Dante Alighieri. Marco, rappresentante di classe, risponde:

Professore, Luigi è assente; tutti gli altri hanno visto almeno una delle due trasmissioni; in particolare 6 ragazzi hanno visto entrambe le trasmissioni e 16 hanno visto la trasmissione su Einstein.

Quanti, tra gli alunni presenti, hanno visto soltanto la trasmissione su Dante Alighieri? [7]

83) Per la festa del Patrono, è stata organizzata una gara podistica che attraversa tutti i rioni della città.

Alla gara erano iscritti 60 atleti e tutti hanno terminato la corsa.

Francesco, seduto nella tribuna situata in prossimità del traguardo, ha notato che le magliette indossate dagli atleti avevano solo tre colori: rosso, giallo e verde.

Osserva anche che 35 atleti indossavano magliette a tinta unita e di questi 15 una maglietta verde; le magliette di 25 atleti avevano almeno due colori e di queste 8 avevano il verde e solo uno fra il rosso e il giallo, 10 non avevano il colore verde e 3 non avevano il giallo; 32 atleti indossavano magliette nelle quali c'era il rosso.

Quanti atleti avevano la maglietta tutta gialla? [8]

Quanti atleti avevano la maglietta tutta rossa? [12]

Quanti atleti avevano la maglietta con tutti e tre i colori? [7]

84) Il circolo "La sveglia" conta 100 soci tutti presenti alla riunione di venerdì sera.

Lucia chiede a Marco di prestargli il cellulare perché lo ha dimenticato, ma anche Marco non ha il cellulare. Chiedendo agli altri, Lucia si accorge che, al circolo, i soci hanno cellulari di tre marche: Alka, Binka, Selka. Nota, però, che nessun socio, quella sera, ha un cellulare di tutte e tre le marche; dei 73 soci che quella sera hanno un solo cellulare, 32 hanno un cellulare Alka, 20 un cellulare Binka; dei 20 soci che quella sera hanno due cellulari, 7 hanno un cellulare Alka ed uno Binka, 5 hanno un cellulare Binka ed uno Selka.

Quanti soci, quella sera, erano senza cellulare? [7]

Quanti soci, quella sera, avevano un cellulare Alka ed uno Selka? [8]

TEST DI AUTOVALUTAZIONE

1) Quali dei seguenti gruppi di elementi rappresenta un insieme in senso matematico?

   a) I compagni simpatici della tua classe.
   b) Le regioni di una nazione.
   c) I numeri pari.
   d) I numeri grandi.
   e) I tuoi amici alti
   f) I numeri naturali compresi tra 2 e 8
   g) I numeri maggiori di 6

2) Dato l'insieme $A = \{2, 4, 6, 8\}$ quale delle seguenti scritture è corretta per rappresentarlo?

   a) $A = \{x/\ x \in P,\ 2 \leq x \leq 8\}$
   b) $A = \{x/\ x$ è un numero maggiore di due$\}$
   c) $A = \{x/\ x$ è un multiplo di due$\}$
   d) $A = \{x/\ 2 < x < 8\}$

3) Dato l'insieme B = {x/ x è una lettera della parola "professore"}

   Quale delle seguenti rappresentazione per elencazione è esatta?

   a) $B = \{$ p,r o,f,s,s,e,o,r$\}$
   b) $B = \{$ p,r o,f,s,e,o,r$\}$
   c) $B = \{$ p,r o,f,s,e$\}$

4) Dati gli insiemi $A = \{x/\ x$ è una lettera della parola "esercizio"$\}$ e

   $B = \{x/\ x$ è una lettera della parola "espressione"$\}$

   a) $A \cap B = \{$ e,s,r,i,o$\}$
   b) $A \cap B = \{$ e,s,r,i,o,e,s,p,i,o$\}$
   c) $A \cap B = \{$ c,z,p,i,n$\}$

5) Dati gli insiemi $A = \{a,b,c,d,f\}$ e $B = \{a,b,n,z\}$

   a) $A - B = \{n,z\}$
   b) $A - B = \{c,d,f\}$
   c) $A - B = \{a,b\}$

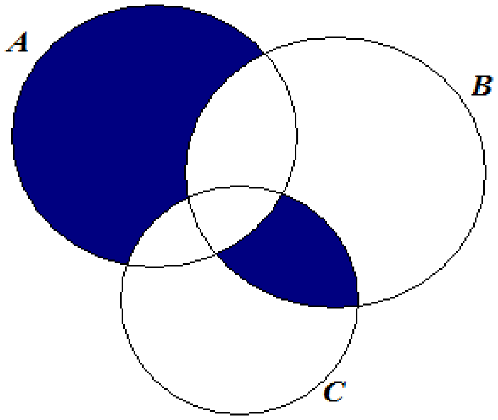
6) Se l'insieme $A = \{1,7,8,9\}$ e l'insieme $B = \{2,7,9,3\}$ allora:

   a) $A \cup B = \{1,7,8,9,2,3,7,9\}$
   b) $A \cup B = \{7,9\}$
   c) $A \cup B = \{1,7,8,9,2,3\}$

7) Quali dei seguenti insiemi sono infiniti?

   a) I numeri Naturali
   b) I punti di una retta
   c) Le provincie di una regione
   d) I numeri razionali compresi tra 0 e 1
   e) I numeri pari
   f) Le lettere dell'alfabeto

8) Data la seguente rappresentazione di Eulero-Venn, la parte evidenziata corrisponde a:



   a) $[A-(B\cup C)]\cup\left[(C\cup B)-(A\cap B\cap C)\right]$
   b) $(A-B)\cup(C-B)-(C\cap B)$
   c) $(C-B)\cup\left[A-(A\cup B)\right]$

9) Ad un raduno di ciclisti partecipano 100 persone, 20 di queste hanno la maglia azzurra, 30 hanno il caschetto giallo, 60 non hanno la maglia azzurra e neppure il caschetto giallo. Quanti ciclisti hanno sia la maglia azzurra che il caschetto giallo?

   a) 20
   b) 40
   c) 10

10) Dati gli insiemi A = {1, 2, 3, 4} e B = {2 ,5} allora:

   a) $A\times B$ = {1, 3, 4, 2, 5}
   b) $A\times B$ = {(2, 1); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (5, 1); (5, 2); (5, 3); (5, 4)}
   c) $A\times B$ = {(1, 2); (1, 5); (2, 2); (2, 5); (3, 2); (3, 5); (4, 2); (4, 5)}

11) Dati gli insiemi $A = \{x \in \boldsymbol{N} \,/\, x \geq 3\}$, $B = \{x \in \boldsymbol{N} \,/\, x < 5\}$, $C = \{x \in \boldsymbol{N} \,/\, 1 < x \leq 3\}$ calcola:

a) $A \cap B \cap C$ b) $A \cap B$ c) $(\overline{B} \cap C) \cup B$

12) Siano $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, b, c\}$, $C = \{f, g\}$ stabilisci il valore di verità delle seguenti affermazioni:

a) $B \subset A$ b) $(B \cup C) \cap A = A$ c) $A \cap C = \varnothing$

Soluzioni

1) **a. b. f. g.**
2) **a.**
3) **c.**
4) **a.**
5) **b.**
6) **c.**
7) **a. b. d. e.**
8) **a.**
9) **c.**
10) **c.**
11) **a. {3}; b. {3,4}; c. B**
12) **V; F; V**

Punteggi assegnati alle domande:

Punti 1 domande **1-2-3-4-5-6-7**; **punti 2** domande **8-9**; **punti 1.5** domande **11-12**

Valutazione del test

- **da 0 a 3 punti**: hai una scarsa conoscenza degli argomenti trattati e devi ripassare con attenzione tutta l'unità didattica;
- **da 4 a 5 punti**: hai una conoscenza approssimativa e non sufficiente degli argomenti trattati, devi approfondire;
- **da 6 a 11 punti**: hai conoscenze sufficienti o discrete ma puoi ancora migliorare; **da 12 a 15 punti**: complimenti, hai ottime conoscenze dei contenuti trattati.